Anfangsgründe

der

Mechanik fester Körper

mit

vielen Uebungsaufgaben

zum

Schulgebrauche

an Gymnasien und verwandten Lehranstalten

von

Dr. Joh. Chr. Walberer,
Professor am königlichen Gymnasium in Amberg.

Vierte, durchgesehene Auflage.

München.
Theodor Ackermann.
1881.

B

Anfangsgründe

der

Mechanik fester Körper

mit

vielen Uebungsaufgaben

zum

Schulgebrauche

an Gymnasien und verwandten Lehranstalten

von

Dr. Joh. Chr. Walberer,

Professor am königlichen Gymnasium in Amberg.

Vierte, durchgesehene Auflage.

München.

Theodor Ackermann.

1881.

Kgl. Hof-Buchdruckerei von E. Mühlthaler in München.

Vorwort zur vierten Auflage.

Seit dem Erscheinen der dritten Auflage hat sich weder ein äußerer noch ein innerer Anlaß zu nennenswerten Aenderungen außer der Adoptierung der offiziellen neuen Rechtschreibung ergeben. In Zuschriften und Recensionen gemachte Bemerkungen und Winke habe ich dankbarst entgegengenommen und so gut als möglich berücksichtigt; im Uebrigen verweise ich auf das Vorwort der dritten Auflage.

Amberg, im April 1881.

Vorwort zur dritten Auflage.

Aus dem raschen Absatz der zweiten Auflage dieses Buches glaube ich schließen zu dürfen, daß dasselbe, abgesehen von seinen Unvollkommenheiten, in der Hauptsache geeignet ist, den Bedürfnissen und Anforderungen der Schule zu genügen. Ich fand deßhalb bei der Herstellung der vorliegenden dritten Auflage auch keine Veranlassung, wesentliche Aenderungen vorzunehmen, und habe mich in Folge dessen auf die Revision des Textes, sowie der Zahlenangaben beschränkt. Um dem offiziellen Lehrprogramm gerecht zu werden, wurden in der Einleitung die allgemeinen Eigenschaften der Körper in möglichster Kürze aufgenommen; die Erklärung des Thermometers und Barometers dagegen mußte

auch diesmal wegbleiben und dem mündlichen Unterrichte überlassen werden, weil ich nirgends eine passende Stelle hiefür finden konnte. Bei den Aufgaben wurden die älteren Zahlen teilweise durch neue ersetzt; einerseits um wo möglich die Resultate abzurunden, damit nicht die Auffassung und das Verständniß durch zeitraubende Rechnungen unnötig erschwert werde, andrerseits um etwaigen Vererbungen fertiger Arbeiten innerhalb der Schülerkreise vorzubeugen. Nicht minder habe ich Sorge getragen, Recensionen, von denen ich Kenntniß erhalten habe, soviel als möglich zu berücksichtigen und den differierenden Meinungen entgegen zu kommen. Doch konnte ich nicht in allen Punkten meine Anschauung unterordnen, muß vielmehr bekennen, daß es bei aller Bereitwilligkeit für den Autor nicht selten eine Unmöglichkeit ist, den verschiedenen, bis zum Widerspruch auseinandergehenden Anforderungen der Herren Recensenten zu genügen. So konnte ich insbesondere die an sich diffizile Behandlung des Parallelogramms der Kräfte nicht ändern und halte es für keinen Vorwurf, daß ich hierin der Darstellung des seligen Dr. Simon Ohm (Grundzüge der Physik, Nürnberg 1853), eines Mannes, der nicht minder durch seine Gründlichkeit, als durch seine Gelehrsamkeit in hohem Ansehen stand, gefolgt bin.

Hinsichtlich des Umfangs konnte ich, von der Meinung ausgehend, daß das Zuviel ein kleineres Uebel sei, als das Zuwenig, eine Kürzung nicht erzielen und muß es daher dem Ermessen des Lehrers anheimgeben, die zugemessene Zeit mit dem gebotenen Lehrstoff in Einklang zu bringen.

Möge auch diese neue Auflage Beifall finden und zu einem gedeihlichen, fruchtbringenden Unterricht in der Schule beitragen helfen!

Amberg, im August 1877.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Teil. Statik fester Körper.

II. Teil. Dynamik.

Viertes Kapitel.

III. Teil. Aufgaben.

A. Ueber das Gleichgewicht.

B. Aus der Dynamik.

Einleitung. Grundbegriffe.

§ 1. **Ruhe und Bewegung.** Ein Körper befindet sich im Zustande der Ruhe, wenn er beständig denselben Ort im Raume einnimmt; er ist dagegen in Bewegung, wenn er diesen Ort stetig ändert.*

§ 2. **Kräfte.** Jeder Körper bleibt erfahrungsgemäß so lange im Zustande der Ruhe oder Bewegung, als er nicht durch äußere** Ursachen daran gehindert wird. Die Ursachen aller sinnlich wahrnehmbaren Erscheinungen dieser Art heißen Kräfte, und das Prinzip, daß kein Körper aus sich selbst den Zustand der Ruhe oder Bewegung abzuändern vermag, heißt das Gesetz der Trägheit*** oder des Beharrungsvermögens.

Bei jeder Kraft kommen drei Dinge in Betracht: 1) die Größe oder Intensität, 2) die Richtung, und 3) der Angriffspunkt derselben.

Die Größe der Intensität einer Kraft bestimmen wir aus der Größe der Wirkung, welcher ein bestimmter Körper unter-

---

* Ob einem in Betracht gezogenen Körper der eine oder andere dieser Zustände zukommt, können wir nicht jedesmal direkt wahrnehmen; unsere Sinne können uns auch täuschen, wie z. B. in Beziehung auf Sonne und Erde. Der Begriff von Ruhe und Bewegung ist deßhalb nicht subjektiv, sondern objektiv aufzufassen.

** Es gibt auch eine Lebens-, Seelen-, Willenskraft u. dgl., welche Kräfte nicht wohl äußere genannt werden können; von Kräften dieser Art ist in der Folge nicht die Rede.

*** Dieses Naturgesetz lehrte zuerst Galilei in seinen i. J. 1638 erschienenen Discorsen.

worfen ist; die Richtung einer Kraft fällt mit der Geraden zusammen, in welcher der Körper zur Bewegung angetrieben wird; Angriffspunkt ist die Stelle, an welcher die Kraft thätig ist. Die Wirkung einer jeden Kraft auf einen materiellen Körper ist Antrieb zur Bewegung, welche immer geradlinig erfolgen muß, wenn nicht andere Kräfte zugleich thätig sind. Die gerade Linie ist daher in allen Fällen das natürlichste Mittel, nicht bloß die Größe der Bewegung, sondern zugleich auch die Intensität und Richtung einer Kraft graphisch darzustellen, mag die Wirkung der Kraft auf den Körper Ruhe oder Bewegung zur Folge haben.

§ 3. **Allgemeine Eigenschaften der Körper.** Wirkt ein und dieselbe Kraft auf verschiedene Körper, so ist die Wirkung nicht immer die gleiche. Es kommen nämlich allen materiellen Körpern gewisse, von der Materie untrennbare Eigenschaften in verschiedenen Abstufungen zu, von deren Dasein die Wirkungen der Kräfte beeinflußt werden. Bei allen Körpern ist zu berücksichtigen

1) die **Masse** d. i. die Menge des Stoffes oder der Materie, von welcher der Raum des Körpers oder sein Volumen ausgefüllt wird. Zwei Körper A und B haben gleiche Massen, wenn unter gleichen Umständen gleiche Kräfte gleiche Wirkungen auf sie hervorbringen und umgekehrt. Aus dem Begriffe der Gleichheit zweier Kräfte ergibt sich der des Verhältnisses. Bringt eine nfache Kraft auf einen Körper A unter sonst gleichen Umständen dieselbe wahrnehmbare Wirkung hervor, als die einfache Kraft auf den Körper B, so schließen wir, die Masse in A ist die nfache von der in B und umgekehrt. Aus diesem Grunde können Kräfte auch durch Zahlen ausgedrückt werden.

2) **Dichtigkeit** d. i. die Menge der Masse, welche ohne Rücksicht auf Qualität in der Volumeinheit enthalten ist. Ist die Masse des Körpers auf seinen Raum so verteilt, daß an allen Stellen desselben gleiche Volumen auch gleiche Stoffmengen enthalten, so ist der Körper g l e i c h d i c h t.

In diesem Falle ist, wenn wir mit d die Dichtigkeit, mit m die Masse und mit v das Volumen bezeichnen

$$d = \frac{m}{v}, \text{ oder } m = d \cdot v.$$

Außerdem ist die Dichtigkeit eines Körpers von der Temperatur der Umgebung abhängig. Wie die Erfahrung lehrt, dehnen sich alle Körper aus, wenn die Temperatur steigt, und ziehen sich zusammen, wenn sie abnimmt.

3) **Porosität** d. i. die Eigenschaft, daß kein fester Körper seinen Raum stetig ausfüllt, sondern vielmehr überall mit kleinen leeren Zwischenräumen behaftet ist, in welche flüssige und luftförmige Körper eindringen können. Der Grad der Porosität ist jedoch bei den verschiedenen Körpern sehr verschieden.

4) **Zusammendrückbarkeit** d. i. die Eigenschaft, daß alle Körper durch einen entsprechenden mechanischen Druck auf ein kleineres Volumen zusammengepreßt werden können.

5) **Elastizität** d. i. das den Körpern innewohnende Streben, die ihnen eigentümliche urspüngliche Form wieder anzunehmen, wenn die formverändernde Ursache aufgehoben wird.

6) **Undurchdringlichkeit** d. i. die Eigenschaft, daß ein und derselbe Raum von zwei oder mehreren Körpern nicht gleichzeitig, sondern nur nach einander eingenommen werden kann.

Sowohl zur Berücksichtigung der Eigenschaften der Körper, als auch zur Vereinfachung der Aufgabe der Mechanik erscheint es zweckmäßig, den Körper als ein System materieller Punkte zu betrachten und die Wirkungsweise der Kräfte an einzelnen Punkten gesondert zu untersuchen.

§ 4. **Aufgabe der Mechanik.** Ist ein ruhender Körper der Einwirkung äußerer Kräfte unterworfen, so wird derselbe entweder in Ruhe bleiben, oder in Bewegung übergehen. Den ersteren Fall untersucht die Statik, den letzteren die Dynamik.

Statik ist also die Lehre vom Gleichgewicht, Dynamik die Lehre von der Bewegung der Körper; beide Teile zusammen machen den Inbegriff der Mechanik aus.

I. Teil.

Statik fester Körper.

Erstes Kapitel.

Zusammensetzung der Kräfte an einem Punkte.

§ 5. **Erklärung.** Ist ein starres System materieller Punkte in keinem seiner Punkte befestigt, so heißt das System frei.

§ 6. **Erklärung.** Wirken mehrere Kräfte auf ein freies Punktesystem, und es bleibt dasselbe in Ruhe, so halten sich die Kräfte das Gleichgewicht. Zwei Kräfte, welche sich das Gleichgewicht halten, heben sich auf.

§ 7. **Grundsätze.** Der Zustand des Gleichgewichts bleibt ungeändert:

1) wenn man einen oder mehrere Angriffspunkte festmacht;
2) wenn man neue Kräfte anbringt, welche unter sich im Gleichgewicht sind;
3) wenn man Kräfte wegläßt, welche unter sich im Gleichgewicht sind und die Wirkungsweise der übrigen Kräfte nicht ändern.

§ 8. **Grundsatz.** Die Wirkungsweise einer Kraft bleibt dieselbe, wenn man neue Kräfte anbringt, welche unter sich Gleichgewicht halten. Vergl. § 120.

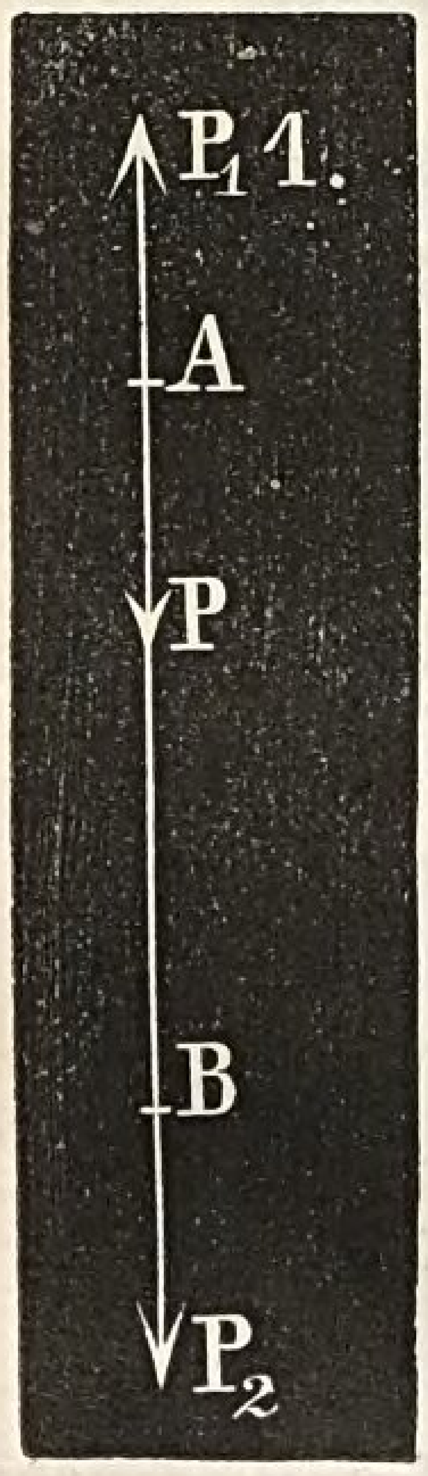
§ 9. **Grundsatz.** Wirken zwei Kräfte auf ein Punktesystem an den Stellen A und B, so halten sie sich nur dann das Gleichgewicht, wenn sie an Intensität gleich, ihrer Richtung nach entgegengesetzt sind und überdies ihre Richtungen mit der Geraden AB zusammenfallen. In jedem andern Falle halten sie sich das Gleichgewicht nicht. Dieses letztere tritt ein, wenn beide

Kräfte ungleich sind, oder wenn sie nach derselben Richtung wirken, oder wenn die geradlinige Verbindung der Angriffspunkte die Kraft-Richtungen schneidet.

Halten sich umgekehrt zwei Kräfte das Gleichgewicht, so sind sie notwendig an Intensität gleich, der Richtung nach entgegengesetzt, Richtung und Angriffspunkte fallen in eine Gerade.

§ 10. **Lehrsatz.** Eine Kraft bringt dieselbe Wirkung hervor, wenn ihr Angriffspunkt an eine andere Stelle ihrer Richtung verlegt wird.

Beweis. Es sei (Fig. 1.) ein freier Punkt A von der Kraft P in der Richtung AP angegriffen. Bringen wir in A und in einem beliebigen Punkte B der Geraden AB zwei neue Kräfte P_1 und P_2, welche unter sich und der ersten Kraft P gleich sind, in der Richtung der Pfeile an, so halten sich (§ 9) P_1 und P_2 das Gleichgewicht, ändern also (§ 8) die Wirkung von P nicht. Andrerseits heben sich die in A wirkenden Kräfte P und P_1 auf, so daß nur P_2 in B wirksam bleibt. Da nun beide Kräfte der Kraft P_1 Gleichgewicht halten, so ist es ganz einerlei, entweder P in A oder P_1 in B nach derselben Richtung wirken zu lassen, was schließlich nichts anderes bedeutet, als daß der Angriffspunkt A nach B verlegt worden ist.



Anmerkung. Die Betrachtung bleibt dieselbe, wenn man die drei Kräfte in entgegengesetzter Richtung wirken läßt; in beiden Fällen wird die Verbindung von A und B starr vorausgesetzt.

§ 11. Zusatz. Bringen zwei Kräfte P in A und P_2 in B einzeln dieselbe Wirkung hervor, so sind sie an Intensität gleich und nach derselben Richtung thätig.

§ 12. **Erklärung.** Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein starres, aber freies System materieller Punkte, so ist es oft möglich, durch Einführung einer neuen Kraft R_1 Gleichgewicht herzustellen. In diesem Falle hebt R_1 die Gesammtwirkung der übrigen Kräfte auf; andrerseits wird aber R_1 durch Einführung

einer gleichen und entgegengesetzten Kraft R aufgehoben. Läßt man also R_1 durch R aufheben, so ist die Wirksamkeit der gegebenen Kräfte frei; läßt man dagegen diesen Kräften durch R_1 das Gleichgewicht halten, so ist R allein thätig. Daraus geht hervor, daß die Wirkung von R dieselbe sein muß, als die aller gegebenen Kräfte, daß sie also diese Kräfte zu ersetzen vermag. Diese Kraft R, welche einzeln dieselbe Wirkung hervorbringt als die gegebenen Kräfte zusammen, heißt Mittelkraft oder Resultante, die gegebenen Kräfte heißen Seitenkräfte oder Komponenten.

§ 13. **Folgerung.** Verlegen wir nach § 10 den Angriffspunkt A der Resultante R nach dem beliebigen Punkt B ihrer Richtung und ersetzen wir an dieser Stelle R durch ihre ursprünglichen Komponenten wieder, so folgt, daß die Wirkung aller einen Punkt angreifenden Kräfte an jeder Stelle in der Richtung der Resultante die gleiche bleibt. Bringen umgekehrt mehrere Kräfte im Punkte B dieselbe Wirkung hervor als in A, so fällt AB in die Richtung der Resultante.

§ 14. **Folgerung.** Wirken zwei Kräfte $P > Q$ auf einen Punkt in ein und derselben Geraden, so ist ihre Resultante

$$R = P + Q,$$

wenn sie in gleicher Richtung thätig sind; dagegen ist

$$R = P - Q,$$

wenn sie in entgegengesetzter Richtung wirken. Wird ein Punkt A von den Kräften $P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$ in derselben Richtung und von den Kräften $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots. Q_m$ in entgegengesetzter Richtung angegriffen, so lassen sich die einen dieser Kräfte in eine Einzelkraft P, die anderen in eine Einzelkraft Q vereinigen und diese letzten zwei in eine Einzelkraft R. Demnach haben wir

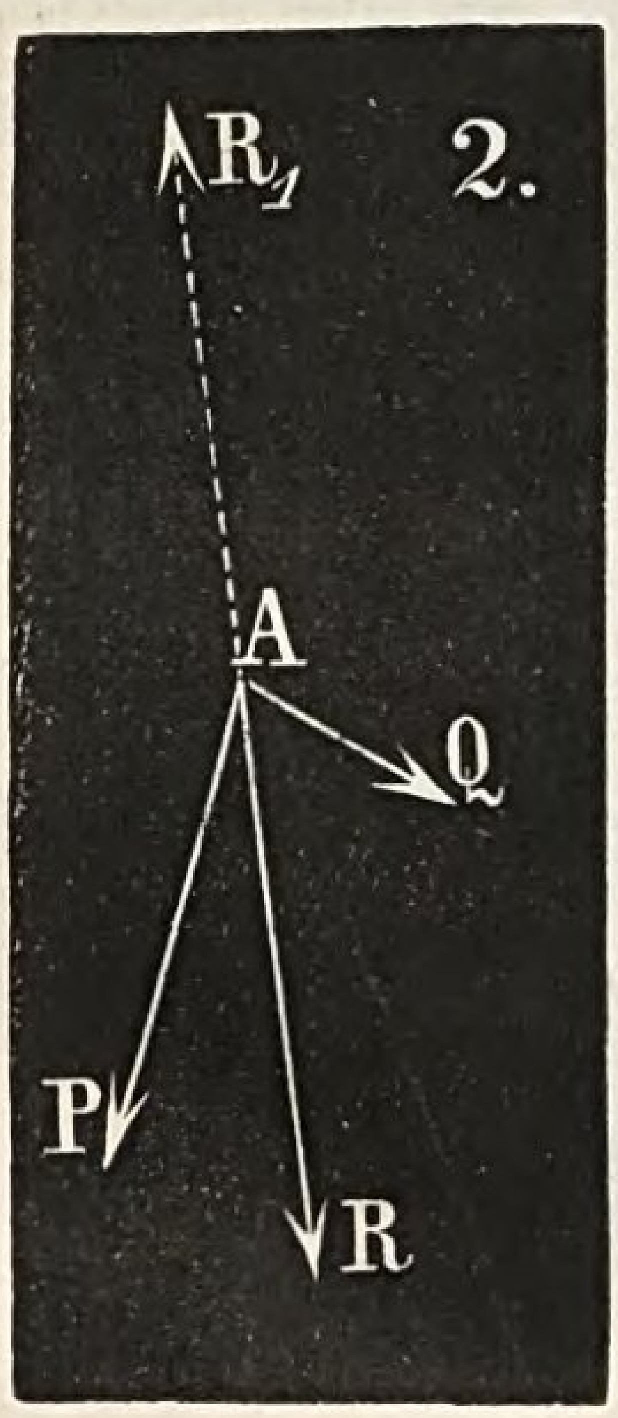
$$P = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots. + P_n$$
$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots. + Q_m$$
$$R = P - Q.$$

§ 15. **Folgerung.** Kräfte von beliebiger Richtung, welche nur einen Punkt angreifen, haben immer eine Resultante. Denn

ein in Bewegung übergehender Punkt kann nicht gleichzeitig nach verschiedenen Richtungen sich bewegen, sondern ist unter allen Umständen gezwungen, seine Bewegung in bestimmter Richtung zu beginnen. Es gibt daher stets eine Kraft R, welche dieser Richtung entgegengesetzt und groß genug ist, diese Bewegung im Beginne (in statu nascenti) zu verhindern, also die Wirkung aller gegebenen Kräfte aufzuheben vermag.

§ 16. **Lehrsatz.** Die Resultante R zweier auf einen Punkt wirkenden Kräfte P und Q liegt in der Ebene dieser Kräfte und zwar innerhalb des hohlen Winkels beider Kräfte.

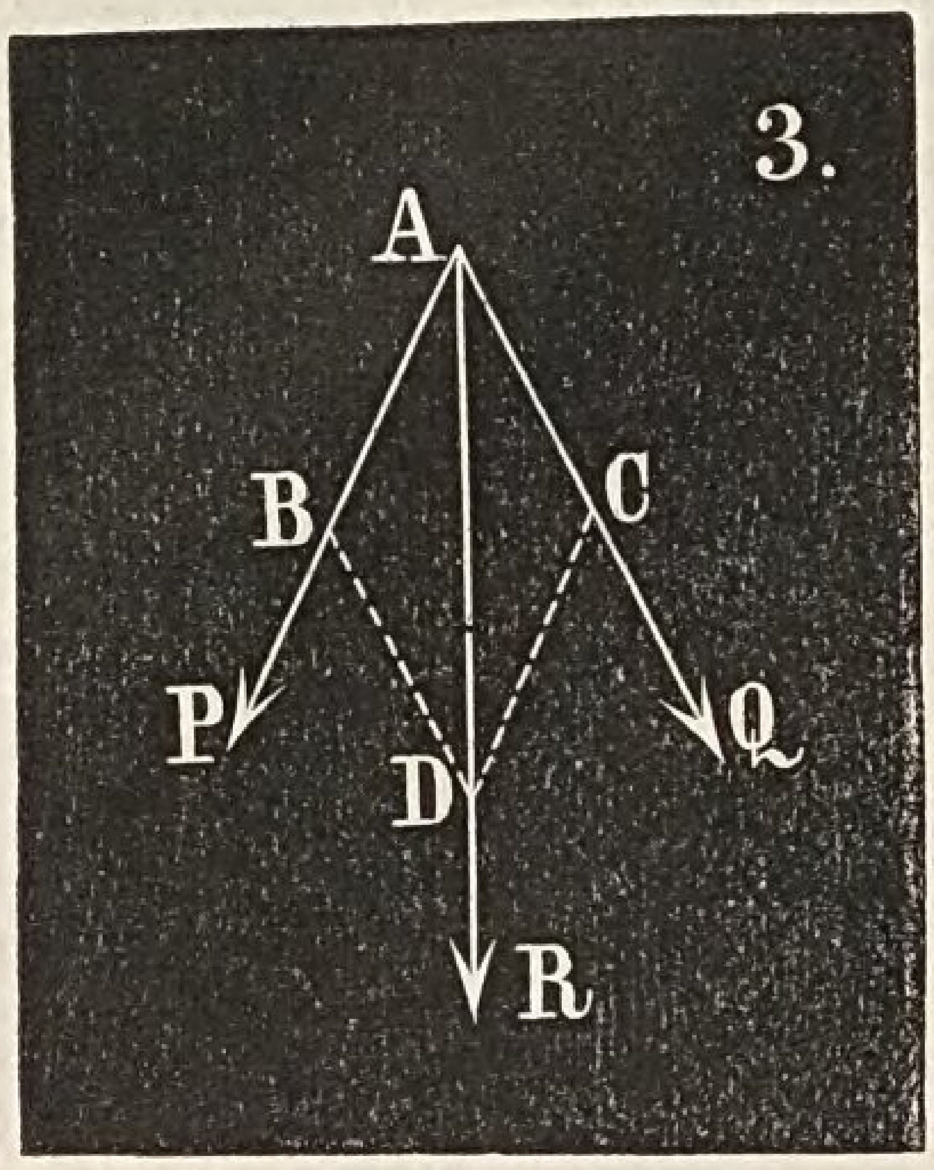
Beweis. Denken wir uns den Punkt A (Fig. 2) von drei Kräften P, Q, R_1 angegriffen, welche sich Gleichgewicht halten, so besteht kein Grund, warum eine dieser Kräfte lieber auf der einen, als auf der anderen Seite der Ebene der beiden andern Kräfte liegen sollte; mithin wirken die drei Kräfte in einerlei Ebene. Wäre der Punkt A von der Kraft P allein angegriffen, so müßte er notwendig seine Bewegung in der Richtung von A nach P beginnen; durch den Hinzutritt der Kraft Q wird er von der Richtung AP gegen AQ hin abgelenkt, so daß die Bewegung nur innerhalb des hohlen Winkels PAQ erfolgen kann.



Diese Bewegung müßte überdies geradlinig beginnen; denn sonst könnte sie nicht durch eine Einzelkraft R_1 aufgehoben werden, was wegen Gleichgewicht der drei Kräfte stattfinden muß. Da nun die Resultante R von der Kraft R_1 im Gleichgewicht gehalten wird, so wirken beide Kräfte (§ 9) in einerlei Geraden, welche in der Ebene PAQ liegen muß, weil auch AR_1 in ihr liegt.

§ 17. **Lehrsatz.** Wirken zwei gleiche Kräfte P = Q auf einen Punkt A (Fig. 3), so liegt ihre Resultante in der Diagonale AD eines Rhombus ABDC, welcher die Richtungen der Kräfte zu Seiten hat.

Beweis. Erstlich liegt die Resultante R innerhalb des Winkels PAQ; zweitens läßt sich nicht einsehen, warum die Richtung AR der einen Kraft näher liegen soll als der andern. AR liegt also notwendig in der Mitte und halbirt den ∠ PAQ, was bei jeder Diagonale eines Rhombus der Fall ist.



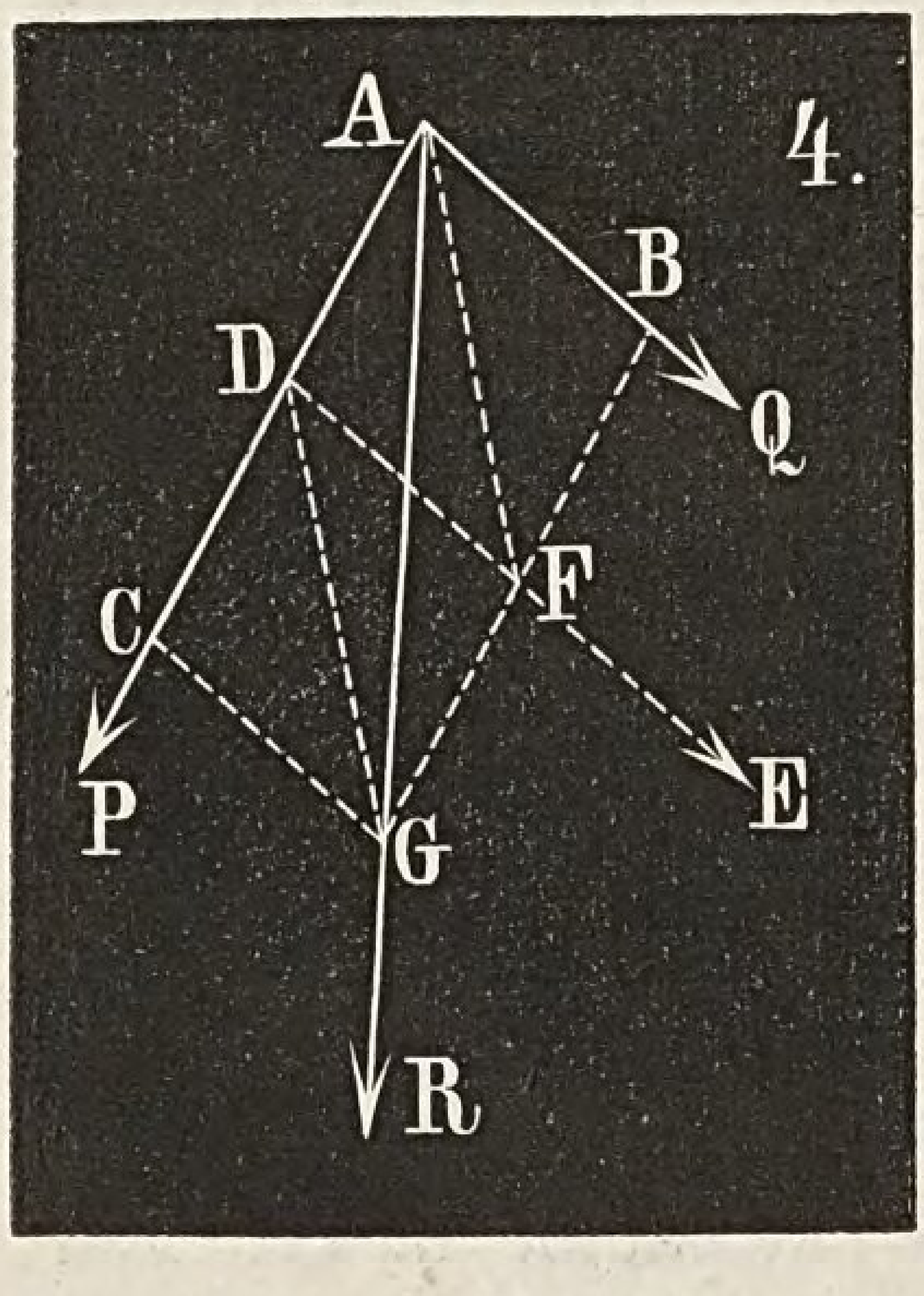
Folgerung. Die Seitenkräfte P und Q bringen in D und jedem anderen Punkte der Diagonale AD (§ 13) dieselbe Wirkung hervor, als in A.

§ 18. **Kräfteparallelogramm.** Lehrsatz. Wirken zwei beliebige Kräfte P und Q auf einen Punkt A (Fig. 4 und 5), so ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelogramms bestimmt, welches die beiden Kräfte zu Seiten hat.

Der Beweis zerfällt in zwei Teile.

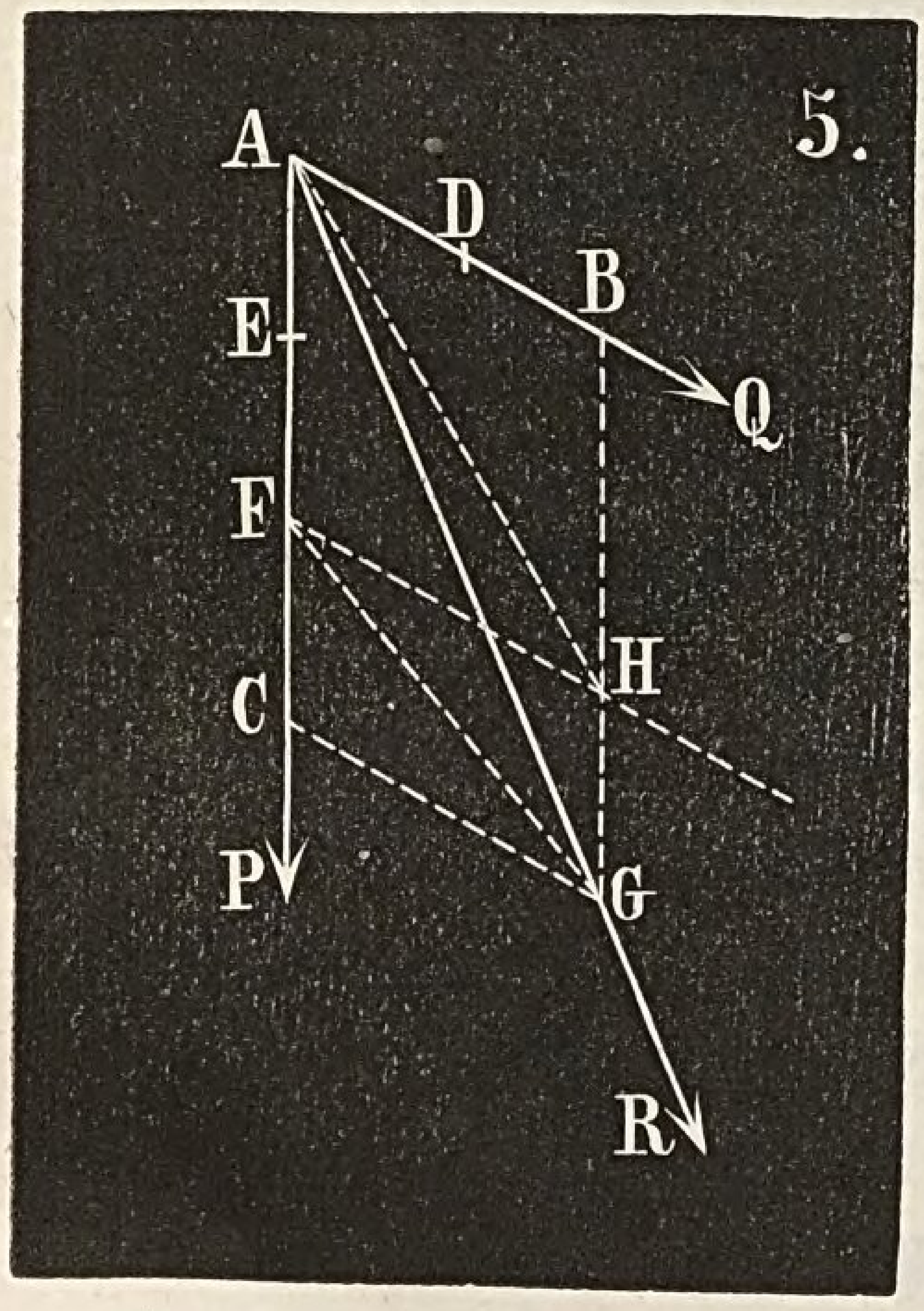
a) Richtung der Resultante.

Angenommen, die Kräfte wirken längs AP und AQ und seien in dem einfachen Verhältnis 2 : 1, also P = 2 Q. In Rücksicht darauf sei AC = 2 AB und AD = AB, dann ABFD ein Rhombus und ABGC ein Parallelogramm, so können wir uns vorstellen, die Kraft AC bestehe aus AD + DC, deren Angriffspunkte A und D sind; dann fällt die Resultante der beiden gleichen Kräfte AB und AD in die Richtung AF und es lassen sich (§ 13) die Komponenten von A nach F verlegen. Denken wir uns AD nach FG sowie AB nach FE verlegt, so können wir neuerdings FE in D und



FG in G wirken lassen. Wir haben jetzt drei gleiche Kräfte, von denen eine in G und die anderen zwei in D wirksam sind. Die Resultante dieser letzteren beiden liegt in der Diagonale DG des Rhombus CDFG; mithin können beide in G angebracht werden. Da nun die gegebenen Kräfte in G dieselbe Wirkung hervorbringen, als in A, so ist AG (§ 13) die Richtung der Resultante, welche mit der Diagonale des aus AB und AC konstruierten Parallelogramms zusammenfällt.

Nehmen wir an, P : Q = 3 : 2 und machen wir (Fig. 5)



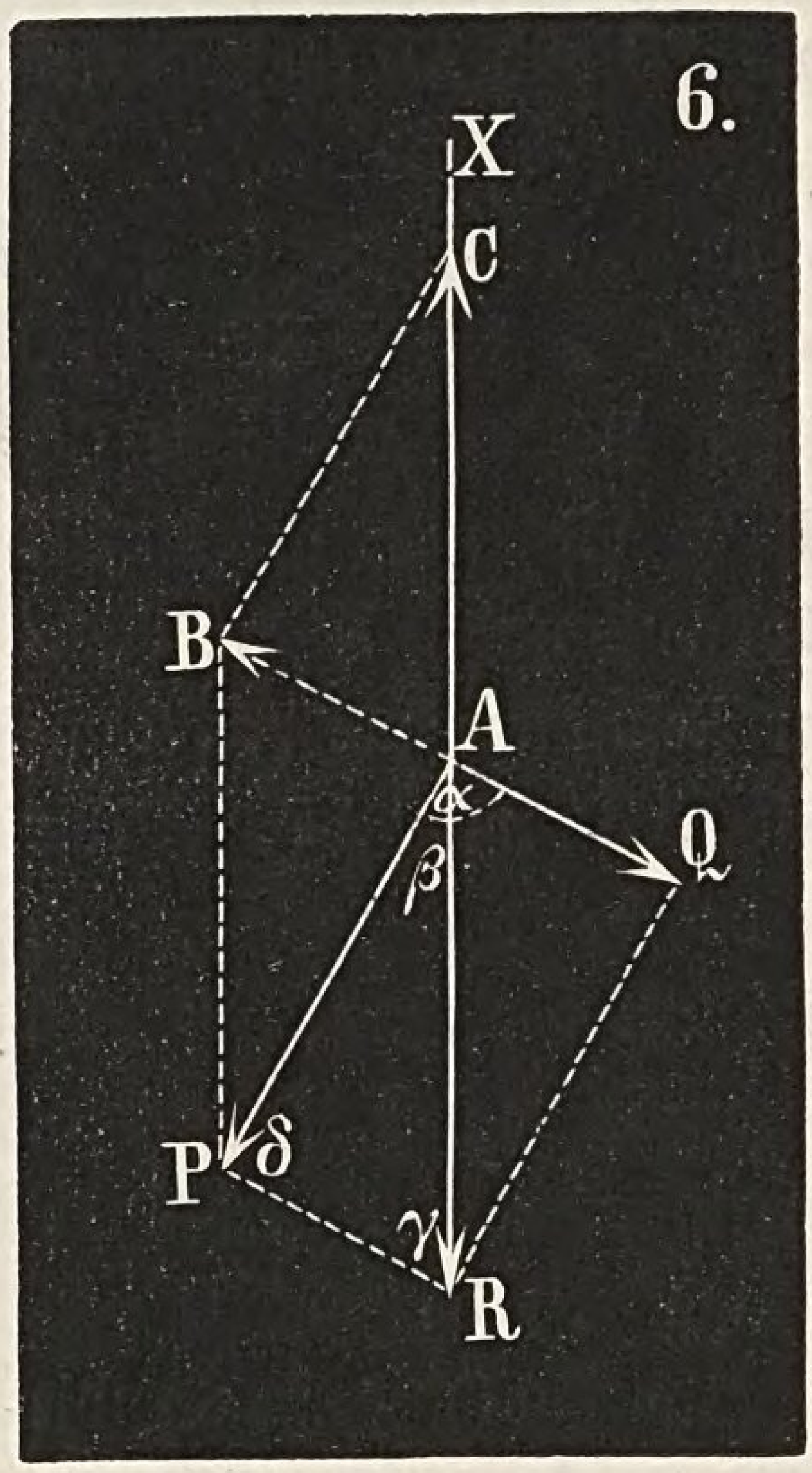
AD = BD = AE = EF = FC und ziehen BG ⧣ AC sowie CG ⧣ FH ⧣ AB, so ist ABFH ein Rhombus und AH die Richtung der Resultante aus den Komponenten AB und AF. Wir können daher, wie vorhin, den Angriffspunkt der Kraft AB nach H und von da nach F, desgleichen den Angriffspunkt der Kraft AF nach H und von da nach G verlegen. Wir haben demnach die Kraft AF in G und zwei Kräfte FH und FC in F thätig, deren Resultante in die Diagonale FG fällt, weil FH = 2 FC und CFHG ein Parallelogramm ist. Es können daher auch diese beiden Kräfte nach G verlegt werden. Da demnach die gegebenen Kräfte in G dieselbe Wirkung als in A hervorbringen, so ist AG, d. h. die Diagonale des aus AB und AC konstruierten Parallelogramms, auch in diesem Falle die Richtung der Resultante.

Haben die Kräfte P und Q ein anderes Verhältnis, etwa m : n, so führt eine ähnliche Betrachtung zu demselben Resultate. Sollte endlich das Verhältnis P : Q inkommensurabel sein, so lassen sich immer zwei Zahlen m und n auffinden, welche als endliche Zahlen kommensurabel sind und hinlängliche Genauigkeit gewähren. Die Diagonale des aus P und Q konstruierten

Parallelogramms ist daher in allen Fällen die Richtung der Resultante.

b) Größe der Resultante.

Seien AP und AQ (Fig. 6) die beiden Kräfte der Größe und Richtung nach, APRQ das daraus gebildete Parallelogramm, so ist zu beweisen, daß die Diagonale AR die Resultante auch der Größe nach ist.



Denken wir uns in A eine der Resultante R gleiche und im entgegengesetzten Sinne nach AX der Verlängerung von RA wirkende Kraft R_1 angebracht, so muß sie den Kräften P und Q das Gleichgewicht halten.

Im Zustande des Gleichgewichts hält aber auch die Kraft Q den beiden andern P und R_1 das Gleichgewicht; mithin auch der aus P und R_1 gebildeten Resultante, deren Richtung in die Verlängerung AQ fallen muß. Ziehen wir daher durch Punkt P eine Parallele zu AX, welche die verlängerte QA in B schneidet, und BC ╫ PA, so ist AC die Größe derjenigen Kraft, welche den beiden gegebenen das Gleichgewicht hält. Denn jede andere Strecke bildet mit AP ein Parallelogramm, dessen Diagonale von AB abweicht, in welchem Falle nicht mehr Gleichgewicht bestehen kann. Wegen AC = BP und BP = AR, ist auch AC = AR, was zu beweisen war.

Anm. Zur Verhütung von Mißverständnissen sei wiederholt bemerkt, daß die Kräfte sich auf zweifache Art darstellen lassen; in der Rechnung setzen wir Zahlen, wie P, Q, R, in der Figur Linien, wie AP, AQ, AR.

§ 19. Zusatz. Bezeichnen wir den Winkel der zwei gegebenen Kräfte mit α, die des Dreieckes ARP (Fig. 6) be-

ziehungsweise mit β, γ, δ, so haben wir nach den Regeln der Trigonometrie

$$AP : PR : AR = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\delta$$
$$AR^2 = AP^2 + PR^2 - 2AP\cdot PR \cos\delta;$$

oder wenn wir die Linien durch Zahlen ausdrücken und bemerken, daß $PR = AQ$ und $\delta = 180 - \alpha$, also $\sin\delta = \sin\alpha$ und $\cos\delta = -\cos\alpha$ ist:

$$1)\ P : Q : R = \sin\gamma : \sin\beta : \sin\alpha$$
$$2)\ R^2 = P^2 + Q^2 + 2P\cdot Q \cos\alpha.$$

Vermöge dieser zwei Relationen ist R der Größe und Richtung nach durch Rechnung bestimmt. Zur Berechnung der Winkel kann man nach den Regeln der Trigonometrie anstatt (1) und (2) auch von den Gleichungen

$$(3)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\gamma-\beta) = \frac{P-Q}{P+Q}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$(4)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = \sqrt{\frac{(Q+R-P)(Q+P-R)}{(P+Q+R)(P-Q+R)}}$$

$$(5)\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(P+Q+R)(P+Q-R)}{(R+P-Q)(R-P+Q)}}$$

Gebrauch machen.

Für $P = Q$ wird aus (2) oder auch direkt

$$(6)\ R = 2P\cos\tfrac{1}{2}\alpha;$$

für den besonderen Fall, daß $\alpha = 90$, folgt

$$(7)\ R = \sqrt{P^2 + Q^2};\ P = R\cos\beta;\ Q = R\sin\beta,$$

und durch Division der letzten zwei Gleichungen

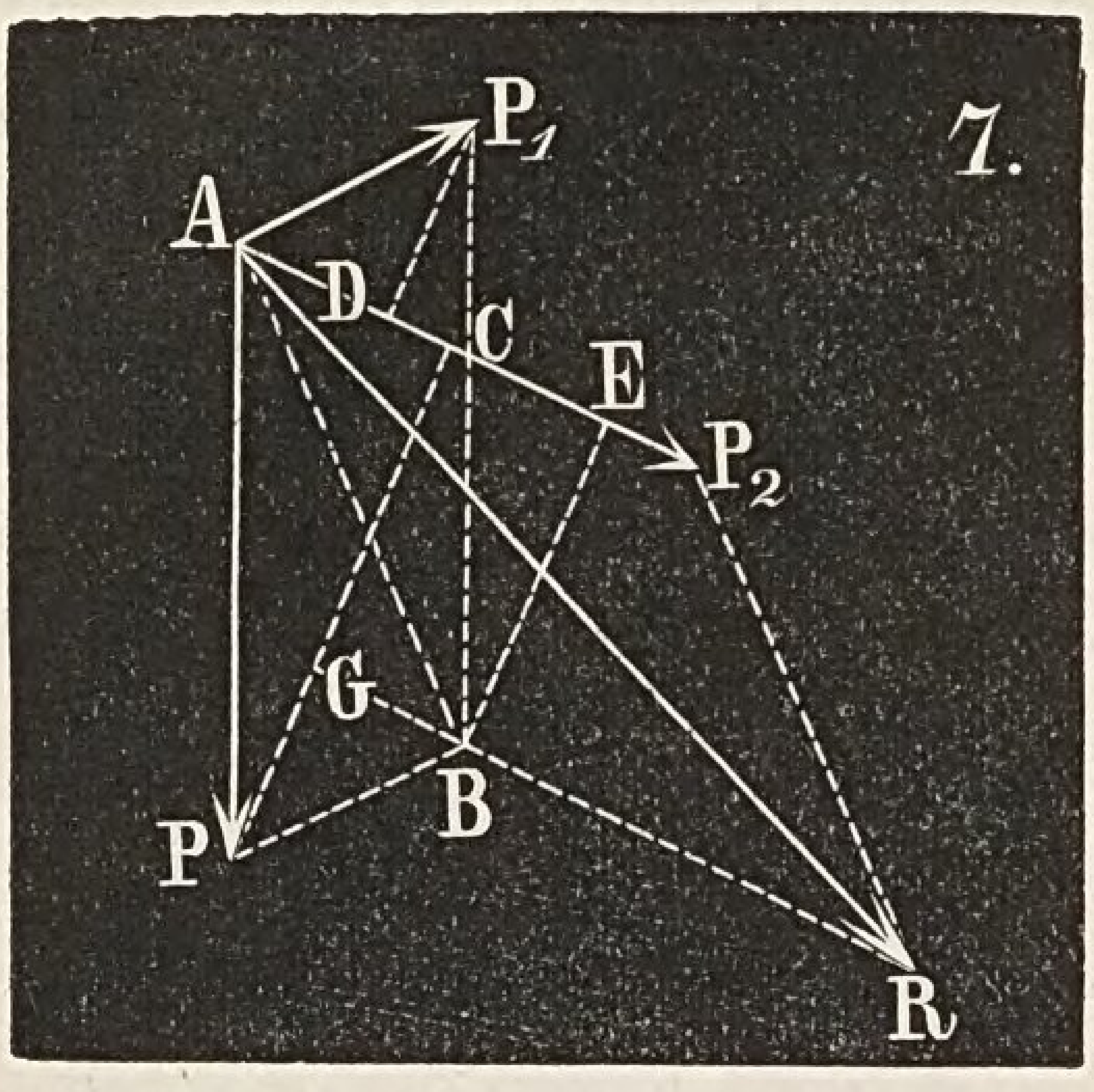
$$(8)\ \operatorname{tang}\beta = \frac{Q}{P}.$$

Anm. Der in § 18 aufgestellte Fundamentalsatz der Mechanik dient nicht bloß dazu, zwei Kräfte in eine zu verwandeln, sondern auch umgekehrt jede Einzelkraft in zwei Komponenten von beliebiger Richtung zu zerlegen.

§ 20. **Lehrsatz.** Wirken mehr als zwei Kräfte auf einen Punkt A, so ist die Resultante der Größe und Richtung nach

durch die Schlußseite eines Polygons ausgedrückt, dessen übrigen Seiten gleich und parallel den gegebenen Kräften sind.

Beweis. Betrachten wir drei Kräfte P, P_1, P_2, welche der Größe und Richtung nach (Fig. 7) durch AP, AP_1, AP_2, dargestellt sind, so haben AP und AP_1 die Diagonale AB als Resultante; das aus AB und AP_2 konstruierte Parallelogramm liefert AR als Resultante der drei gegebenen Kräfte, welche nichts anders ist, als die vierte Seite des Vierecks APBRA, dessen übrigen drei Seiten den gegebenen Kräften gleich und parallel sind. Bei vier Kräften schließt die Resultante ein Fünfeck u. s. w. Wird R = o, so halten sich die gegebenen Kräfte Gleichgewicht und bilden unter sich ein geschlossenes Polygon.



§ 21. Zusatz. So wie durch Konstruktion kann auch durch Rechnung die Resultante R gefunden werden. Bezeichnen wir (Fig. 7) mit α, β, γ die Winkel PAP_1, PAP_2, P_1AP_2, so ist
$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2PP_2 \cos\beta + 2P_1P_2 \cos\gamma$.

Denn aus dem Parallelogramm $ABRP_2$ folgt nach § 10

$$AR^2 = AB^2 + AP_2^2 + 2AB \cdot AP_2 \cos BAP_2;$$

aus dem Parallelogramm $APBP_1$ folgt ähnlich

$$AB^2 = AP^2 + AP_1^2 + 2AP \cdot AP_1 \cos\alpha.$$

Drücken wir die Linien durch Zahlen aus und setzen $\angle BAP_2 = \varphi$, so folgt aus beiden Gleichungen durch Addition

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2AB \cdot P_2 \cos\varphi.$$

Um nun AB cos φ zu eliminieren, fällen wir von den Punkten P, P_1 und B Lote auf AP_2; dann ist

$$AE = AC + AD^*,$$ oder was dasselbe ist

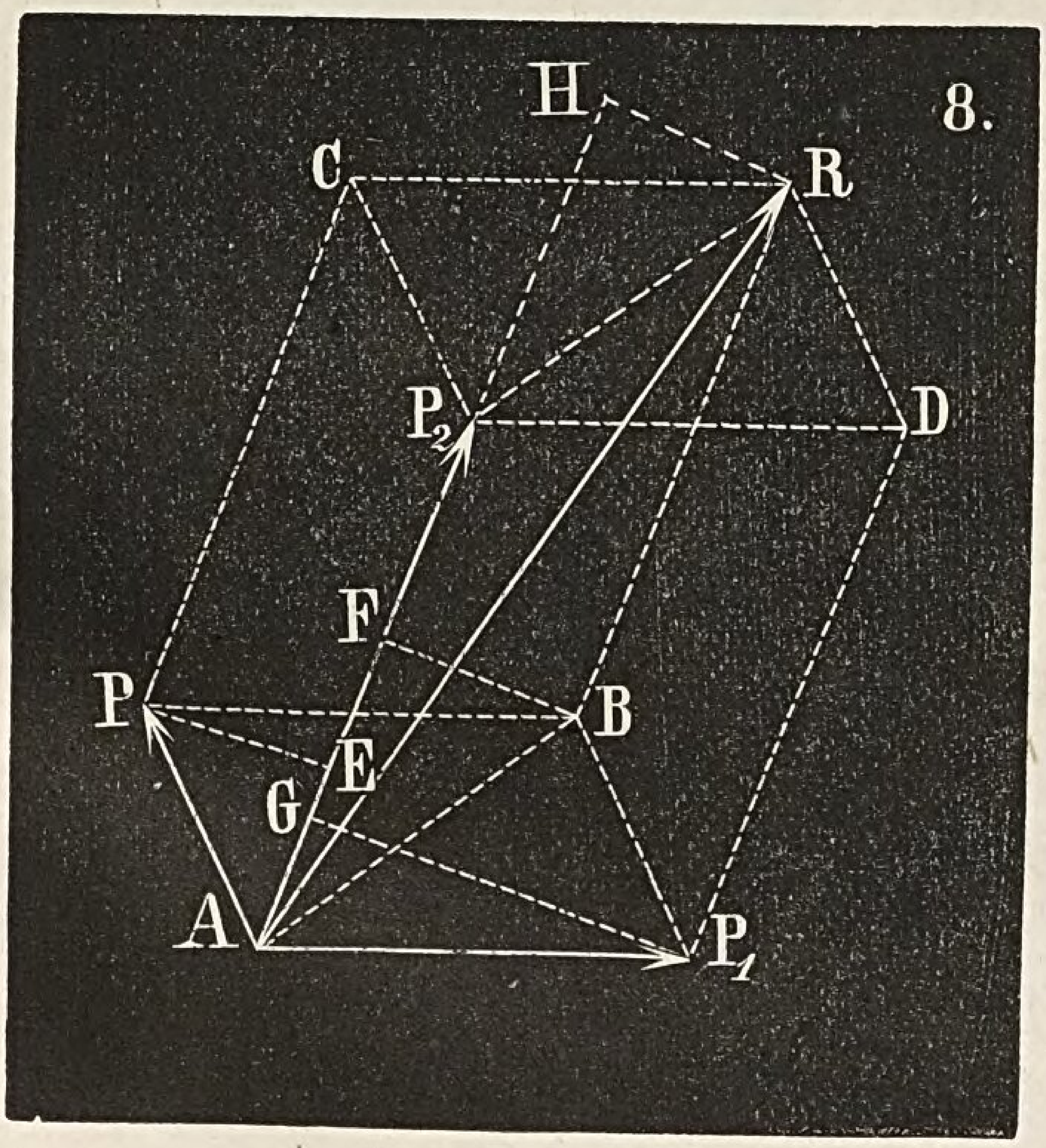
$$AB\cos\varphi = AP\cos\beta + AP_1\cos\gamma = P\cos\beta + P_1\cos\gamma.$$

*) Der in Anwendung gebrachte Satz ist folgender: „Die Projektion der Diagonale eines Parallelogramms auf irgend eine Gerade

Durch Substitution dieses Wertes erhalten wir obige Formel. Was die Richtung der Resultante betrifft, siehe § 23 Gl. (2).

Es ließe sich auch für mehr als 3 Kräfte eine ähnliche Formel aufstellen, allein die entsprechenden Formeln würden immer verwickelter und zum Rechnen wenig brauchbar. Aus diesem Grunde vermeidet die Mechanik solche Formeln und zerlegt mit viel größerem Vorteil die gegebenen Kräfte in rechtwinkelige Komponenten, wie in § 24 gezeigt wird.

§ 22. **Lehrsatz.** Die Resultante dreier Kräfte, welche einen Punkt A angreifen und nicht in einer Ebene liegen, ist der Größe und Richtung nach durch die Diagonale eines Parallelepipeds bestimmt, welches die drei Kräfte zu Kanten hat.



8.

Bew. Seien die drei Kräfte der Größe und Richtung nach durch AP, AP_1, AP_2 dargestellt und Fig. 8 das damit konstruierte Parallelepiped, so ist AB die Resultante aus AP und AP_1, und AR die Resultante aus AB und AP_2; mithin ist AR, d. i. die Diagonale des Parallelepipeds, die Resultante der drei gegebenen Kräfte.

---

ist gleich der algebraischen Summe aus den Projektionen der anstossenden zwei Seiten." Zum Beweise sei BG $\perp$ CP, dann ist

$$\triangle BGP \cong \triangle AP_1D,$$

folglich AD = BG = EC und daher auch AE = AC + AD.

Zusatz. Sowie drei lassen sich durch fortgesetzte Anwendung des Lehrsatzes beliebig viele Kräfte im Raume auf eine Einzelkraft zurückführen und umgekehrt.

§ 23. Zusatz. Bezeichnen wir wie in § 21 mit α, β, γ beziehungsweise die Winkel, welche die drei Kräfte unter sich bilden, so ist die Resultante R ausgedrückt durch

$$(1) R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2PP_2 \cos\beta + 2P_1P_2 \cos\gamma.$$

Denn aus dem Parallelogramm $ABRP_2$ ist nach § 19

$$AR^2 = AB^2 + AP_2^2 + 2AB \cdot AP_2 \cos BAP_2;$$

aus dem Parallelogramm $APBP_1$ folgt ähnlich

$$AB^2 = AP^2 + AP_1^2 + 2AP \cdot AP_1 \cos\alpha.$$

Setzen wir $\angle BAP_2 = \varphi$, und anstatt der Linien Zahlen, so folgt aus beiden Gleichungen durch Addition

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 + 2PP_1 \cos\alpha + 2AB \cdot P_2 \cos\varphi.$$

Nun ist auch hier wie in Figur 7

$$AF = AE + AG, \text{ oder}$$

$$AB \cos\varphi = AP \cos\beta + AP_1 \cos\gamma = P \cos\beta + P_1 \cos\gamma.$$

Mit Hilfe dieses Wertes erhalten wir sofort die aufgestellte Formel.

Bezeichnen wir mit λ, μ, ν die Winkel, welche die Resultante R mit den drei Kräften bildet, so sind dieselben ausgedrückt durch die Gleichungen

$$2) \begin{cases} R \cos\lambda = P + P_1 \cos\alpha + P_2 \cos\beta \\ R \cos\mu = P \cos\alpha + P_1 + P_2 \cos\gamma \\ R \cos\nu = P \cos\beta + P_1 \cos\gamma + P_2. \end{cases}$$

Denn mit Rücksicht auf Fig. 8 ist, wenn wir $RH \perp AP_2$ ziehen,

$$AH = AP_2 + P_2H = AP_2 + AF = AP_2 + AG + AE.$$

Nun ist aber

$$AH = AR \cos\nu = R \cos\nu$$

$$AG = AP_1 \cos\gamma = P_1 \cos\gamma$$

$$AE = AP \cos\beta = P \cos\beta; \text{ mithin}$$

$$R \cos\nu = P_2 + P_1 \cos\gamma + P \cos\beta.$$

Die anderen zwei Gleichungen lassen sich auf dieselbe Weise ableiten und ergeben sich auch aus der vorstehenden Gleichung durch bloße Buchstabenvertauschung. Die Gleichungen in (2) bleiben noch

vollkommen giltig, wenn die drei Kräfte in einer Ebene liegen wie in § 20. Dieser Fall ist durch die Bedingung gekennzeichnet

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

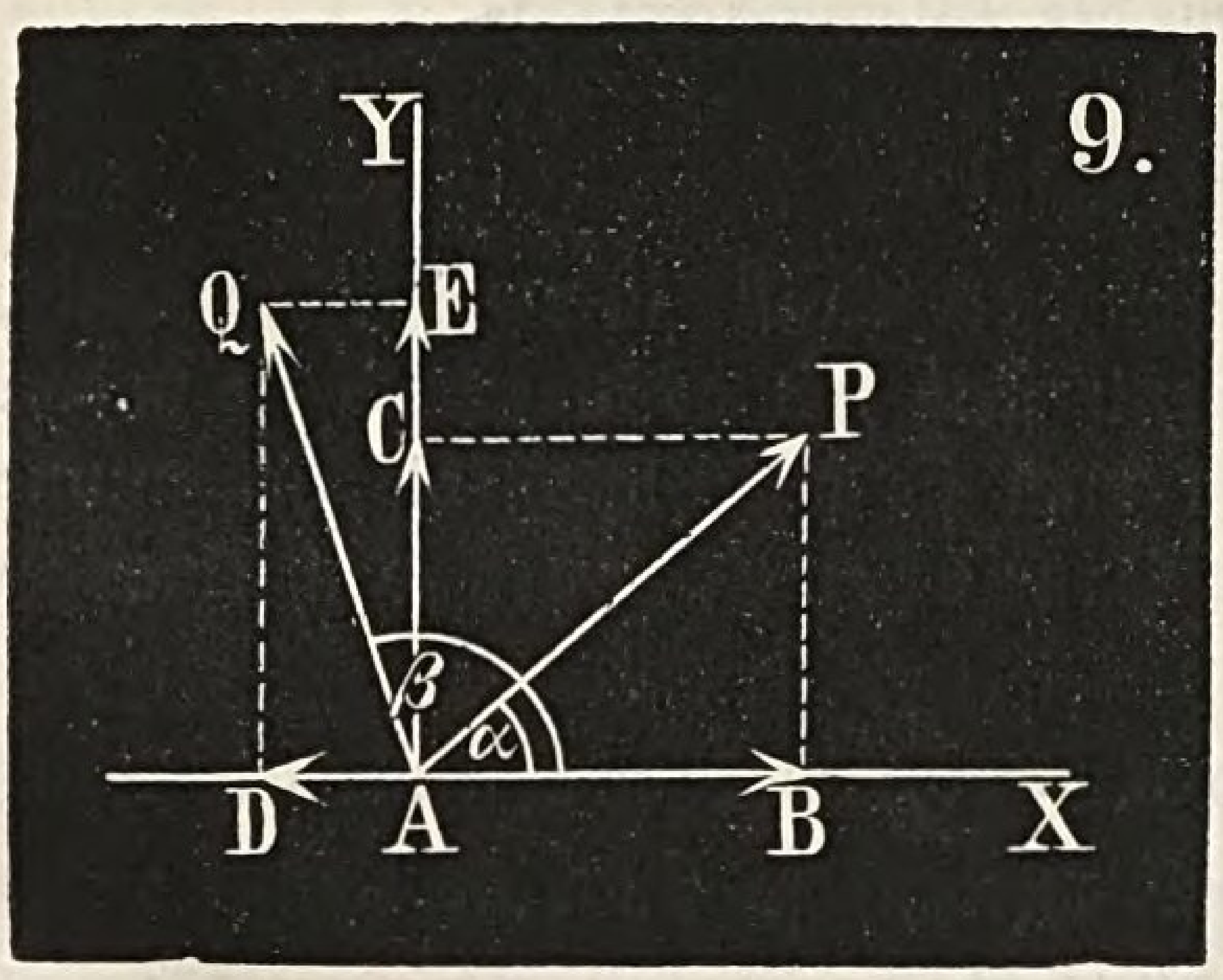
Für ein rechtwinkeliges Parallelepiped ist $\alpha = \beta = \gamma = 90^0$; folglich aus Gl. (1) und (2)

$$(3) \quad \begin{cases} R^2 = P^2 + P_1^2 + P_2^2 \\ \cos\lambda = \frac{P}{R};\ \cos\mu = \frac{P_1}{R};\ \cos\nu = \frac{P_2}{R}. \end{cases}$$

Außerdem findet noch die aus den letzten drei Gleichungen abgeleitete Bedingung statt

$$(4) \quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

§ 24. **Zerlegung in rechtwinkelige Komponenten.** Seien A (Fig. 9) der angegriffene Punkt, AX und AY zwei aufeinander senkrechte Richtungen, AP und AQ zwei gegebene Kräfte, α und β die Winkel, welche die Kräfte mit der Geraden AX immer nach derselben Richtung bilden, also $\angle PAX = \alpha$, $\angle QAX = \beta$, so läßt sich AP in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AC*, die Kraft AQ in AD und AE zerlegen, wobei die Strecke AD der AB entgegengesetzt ist. Nun ist aber



$$AB = AP \cos\alpha;\ AC = AP \sin\alpha$$
$$-AD = AQ \cos\beta;\ AE = AQ \sin\beta$$

Die in den Geraden AX wirkenden Seitenkräfte lassen sich nach § 14 in die eine Kraft

$$AB - AD = AP \cos\alpha + AQ \cos\beta = P \cos\alpha + Q \cos\beta$$

vereinigen; ebenso die längs AY wirkenden in

$$AC + AE = AP \sin\alpha + AQ \sin\beta = P \sin\alpha + Q \sin\beta.$$

---

* Wie bekannt heißen in der Geometrie die Linien AB und AC die Projektionen der Geraden AP auf AX und AY, deren Vorzeichen einzig und allein vom Winkel α abhängen.

Diesen so erhaltenen rechtwinkeligen Kräften entspricht eine Resultante, welche nach § 19 bestimmt ist. Wird Punkt A von beliebig vielen Kräften $P_0, P_1, P_2, \ldots . P_n$ angegriffen, deren Richtungen mit AX die Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \ldots . \nu$ bilden, so läßt sich jede von ihnen nach vorstehender Anleitung in zwei rechtwinkelige Seitenkräfte zerlegen. Die einen dieser Kräfte lassen sich in eine Einzelkraft X, die anderen in eine Einzelkraft Y vereinigen, so daß nur mehr zwei rechtwinkelige Kräfte in Betracht kommen und zwar ist

$$X = P_0 \cos \alpha + P_1 \cos \beta + P_2 \cos \gamma + \ldots . + P_n \cos \nu$$

$$Y = P_0 \sin \alpha + P_1 \sin \beta + P_2 \sin \gamma + \ldots . + P_n \sin \nu.$$

Sobald hiernach X und Y gefunden sind, bestimmen wir nach § 19 Gl. (7) und (8) ihre Resultante R und deren Richtungswinkel φ mit AX durch die Gleichungen

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}; \text{ tang } \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Anm. Da bei der Zerlegung der Kräfte in zwei rechtwinkelige Komponenten die eine Komponente stets mit cosinus und die andere mit sinus behaftet ist, so kann man sie auch durch die Benennung Cosinuskomponente und Sinuskomponente von einander unterscheiden

§ 25. Zusatz. Wird R = o, was nur eintreten kann, wenn X und Y zugleich Null werden, so sind die Kräfte unter sich im Gleichgewicht; ist R nicht Null, so tritt Gleichgewicht ein, wenn eine neue Kraft eingeführt wird, welche R gleich und entgegengesetzt ist. Da es nun unter allen Umständen möglich ist, die Resultante der Größe und Richtung nach zu bestimmen, so ist es auch stets möglich, die gegebenen Kräfte durch Einführung einer neuen Kraft in's Gleichgewicht zu bringen, auch dann noch, wenn die Kräfte in verschiedenen Ebenen liegen. Die einzige Bedingung ist, daß alle Kräfte denselben Angriffspunkt haben. Nach dem Sprachgebrauche der Geometrie ist X und Y nichts anderes, als die algebraische Summe aus den rechtwinkeligen (orthogonalen) Projektionen der gegebenen Kräfte. Die Bedingung des Gleichgewichtes läßt sich in unserem Falle auch so aussprechen: Kräfte, welche einen Punkt angreifen, halten sich Gleichgewicht, wenn die algebraische Summe ihrer

Projektionen auf zwei (im Raume auf drei) senkrechte Gerade zugleich Null ist.

§ 26. Zusatz. Sind nur zwei Kräfte P und Q gegeben und setzen wir rückwärts für X und Y ihre Werte, so ist

$$R^2 = (P \cos \alpha + Q \cos \beta)^2 + (P \sin \alpha + Q \sin \beta)^2,$$

oder nach einigen Reduktionen

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos (\beta - \alpha),$$

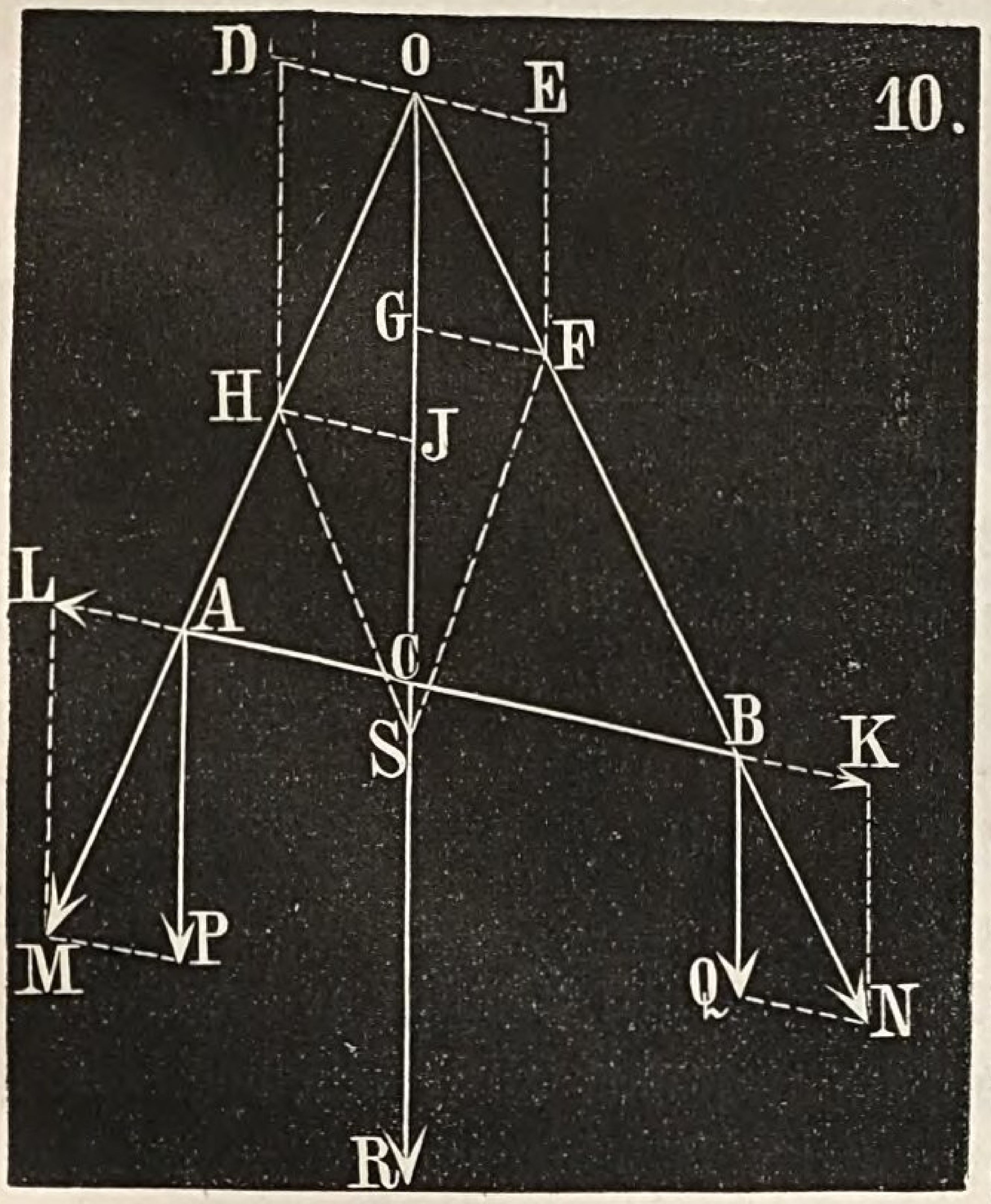
welche Formel mit der früheren in § 19 übereinstimmt, indem $\beta - \alpha$ der Winkel ist, welchen P und Q einschließen.

Zweites Kapitel.

Resultante und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

§ 27. **Erklärung.** Sind die Richtungen zweier Kräfte parallel, so heißen sie selbst parallel, wenn sie nach derselben Richtung hin wirken; dagegen antiparallel, wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken.

§ 28. **Lehrsatz.** Zwei parallele Kräfte P und Q an zwei durch eine Gerade unveränderlich verbundenen Punkten A und B (Fig. 10) haben eine Resultante $R = P + Q$, deren Richtung in gleichem Sinne parallel und deren Angriffspunkt C die Gerade AB in zwei Strecken teilt, die sich umgekehrt verhalten, wie P und Q, d. h.



10.

$$P : Q = BC : AC,$$

oder $AC \cdot P = BC \cdot Q$.

Bew. Seien die Kräfte P und Q der Größe und Richtung nach durch AP und BQ dargestellt, so lassen sich in A und B zwei gleiche und entgegen=

gesetzte längs AB wirkende Kräfte AL = BK anbringen, welche sich Gleichgewicht halten und die Wirkung von P und Q nicht stören. Andrerseits sind aber die jetzt in A und B wirkenden Kräfte durch ihre Resultante AM und BN ersetzt. Verlängert man beide Richtungen bis zu ihrem Durchschnitt in O, so läßt sich der Angriffspunkt beider Kräfte nach O verlegen, wobei das Ganze als starre Verbindung zu denken ist. Macht man daher OH = AM und OF = BN und zerlegt diese Kräfte in die ursprünglichen Komponenten der Größe und Richtung nach, so bringen sowohl die Resultanten OH und OF als auch ihre Komponenten in O dieselbe Wirkung hervor, als die ursprünglichen Kräfte in A und B.

Von den Komponenten in O heben sich OD und OE nach § 9 auf, und es bleiben OJ = AP und OG = BQ allein wirksam, so daß

$$OJ + OG = P + Q$$

die Resultante sowohl der in O, als auch der ursprünglichen in A und B wirksamen Kräfte P und Q ist. Diese Resultante wirkt in gleichem Sinne parallel wie P und Q und schneidet in ihrer Verlängerung die Gerade AB in einem Punkte C, dessen Lage sich mit Hülfe der ähnlichen Dreiecke

$$\triangle AMP \backsim \triangle AOC, \text{ und } \triangle BNQ \backsim \triangle BOC$$

bestimmen läßt. Denn es ist

$$AP : MP = OC : AC$$
$$\underline{NQ : BQ = BC : OC;}$$

woraus durch Multiplikation folgt

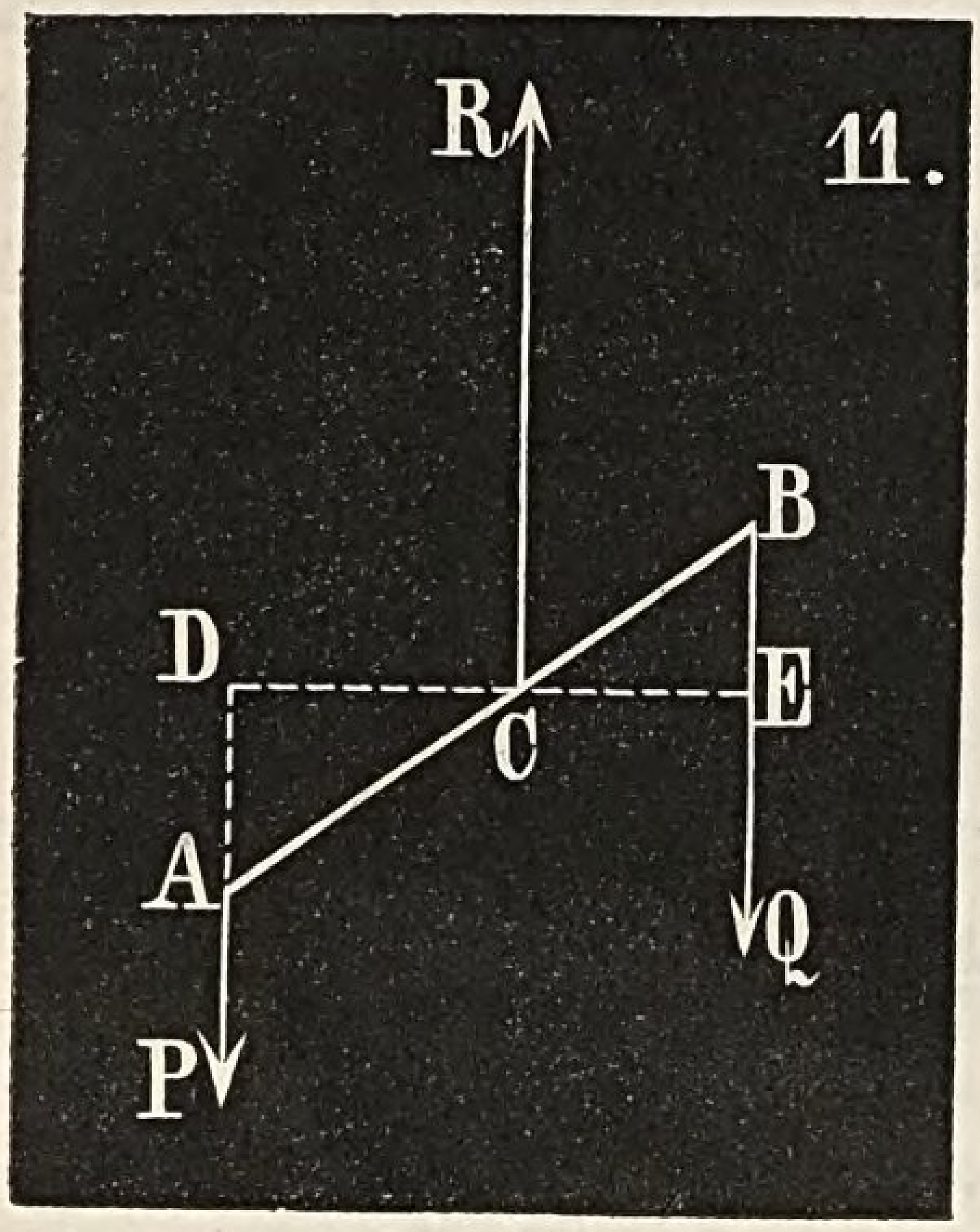
$$AP \cdot NQ : MP \cdot BQ = BC : AC;$$

oder in Berücksichtigung, daß MP = NQ

$$AP : BQ = BC : AC; \text{ oder}$$
$$P : Q = BC : AC; \text{ oder}$$
$$AC \cdot P = BC \cdot Q.$$

Zusatz. Sind in A und B zwei nicht parallele Kräfte, wie AM und BN gegeben, so läßt sich unmittelbar der Schnittpunkt O und durch das Parallelogramm OHSF Richtung, Größe und Angriffspunkt der Resultante R bestimmen.

§ 29. Zusatz. Da die Resultante R durch eine ihr gleiche und entgegengesetzte Kraft aufgehoben wird, so kann auch die Wirkung der Kräfte P und Q (Fig. 11) durch eine Einzelkraft CR aufgehoben werden, welche ihrer Summe gleich, der Richtung nach antiparallel ist und in einem Punkte C angreift, welcher durch die Gleichung



$$AC \cdot P = BC \cdot Q$$

bestimmt ist. Diesen Punkt C heißen wir in der Folge Kräftemittelpunkt. Derselbe ist von der Richtung der Kräfte zur Geraden AB gänzlich unabhängig.

§ 30. Zusatz. Ist $P = Q$ so liegt der Punkt C in der Mitte von AB; oder der geometrische Mittelpunkt ist zugleich Mittelpunkt der Kräfte.

§ 31. Zusatz. Halten sich umgekehrt drei parallele Kräfte P, Q, R an drei in einer Geraden liegenden Punkten A, B, C Gleichgewicht und ist R die größte von ihnen, so ist R notwendig den beiden andern antiparallel und überdies

$$(1)\ R = P + Q;\ (2)\ AC \cdot P = BC \cdot Q.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zugleich noch als Ableitung

$$(3)\ BA \cdot P = BC \cdot R;\ (4)\ AB \cdot Q = AC \cdot R.$$

Die letzten drei Gleichungen sind so beschaffen, daß jede die andern zwei zu ersetzen vermag.

§ 32. **Erklärung.** Jedes der vorigen Produkte aus Kraft und Entfernung des Angriffspunktes von einem zweiten Punkte heißt das Moment der Kraft in Beziehung auf diesen zweiten Punkt und im Zustande des Gleichgewichts das statische Moment. So z. B. ist $AC \cdot P$ das Moment der Kraft P in Beziehung auf C, und $BA \cdot P$ ihr Moment in Beziehung auf Punkt B.

§ 33. **Lehrsatz.** Die *Gleichheit* der Momente zweier parallelen Kräfte bleibt ungestört, wenn man die senkrechte Entfernung des Kräftemittelpunktes von der Kraftrichtung einführt.

1. Beweis. Ziehen wir (Fig. 11) $DE \perp CR$, so haben wir

$AC : BC = CD : CE$, aus $\triangle ACD \backsim \triangle BCE$,

$AC : BC = Q : P$, aus der Voraussetzung;

folglich $CD : CE = Q : P$, oder

$$CD \cdot P = CE \cdot Q.$$

2. Beweis. Bezeichnen wir den Winkel $ACD = BCE$ mit α, so haben wir den Voraussetzungen zufolge

$$AC \cdot P = BC \cdot Q; \text{ also auch}$$

$$AC \cdot P \cos \alpha = BC \cdot Q \cos \alpha,$$

oder wegen $AC \cos \alpha = CD$ und $BC \cos \alpha = CE$

$$CD \cdot P = CE \cdot Q.$$

§ 34. Zusatz. Halten sich drei parallele Kräfte der vorigen Art Gleichgewicht, so hebt jede von ihnen die Wirkung der beiden andern auf und kann daher der *Größe nach* als Resultante der beiden andern betrachtet werden. Im Zustande des Gleichgewichts ist es nach § 7 gestattet, je einen der drei Angriffspunkte als fest zu betrachten. Denken wir uns z. B. den Punkt A fest, so sind nur die Kräfte R und Q wirksam zu denken. Diese Kräfte müssen aber nach § 31 der Bedingung

$$AB \cdot Q = AC \cdot R$$

genügen. Denken wir uns den Punkt B fest, so haben wir P und R wirksam und als Bedingung des Gleichgewichts

$$BA \cdot P = BC \cdot R.$$

Da aber diese Produkte nichts anderes sind, als die statischen Momente in Beziehung auf den fest gedachten Punkt, so läßt sich folgender Satz aufstellen:

Halten drei parallele Kräfte an einer Geraden sich das Gleichgewicht, so sind ihre statischen Momente in Beziehung auf jeden der drei Angriffspunkte gleich.

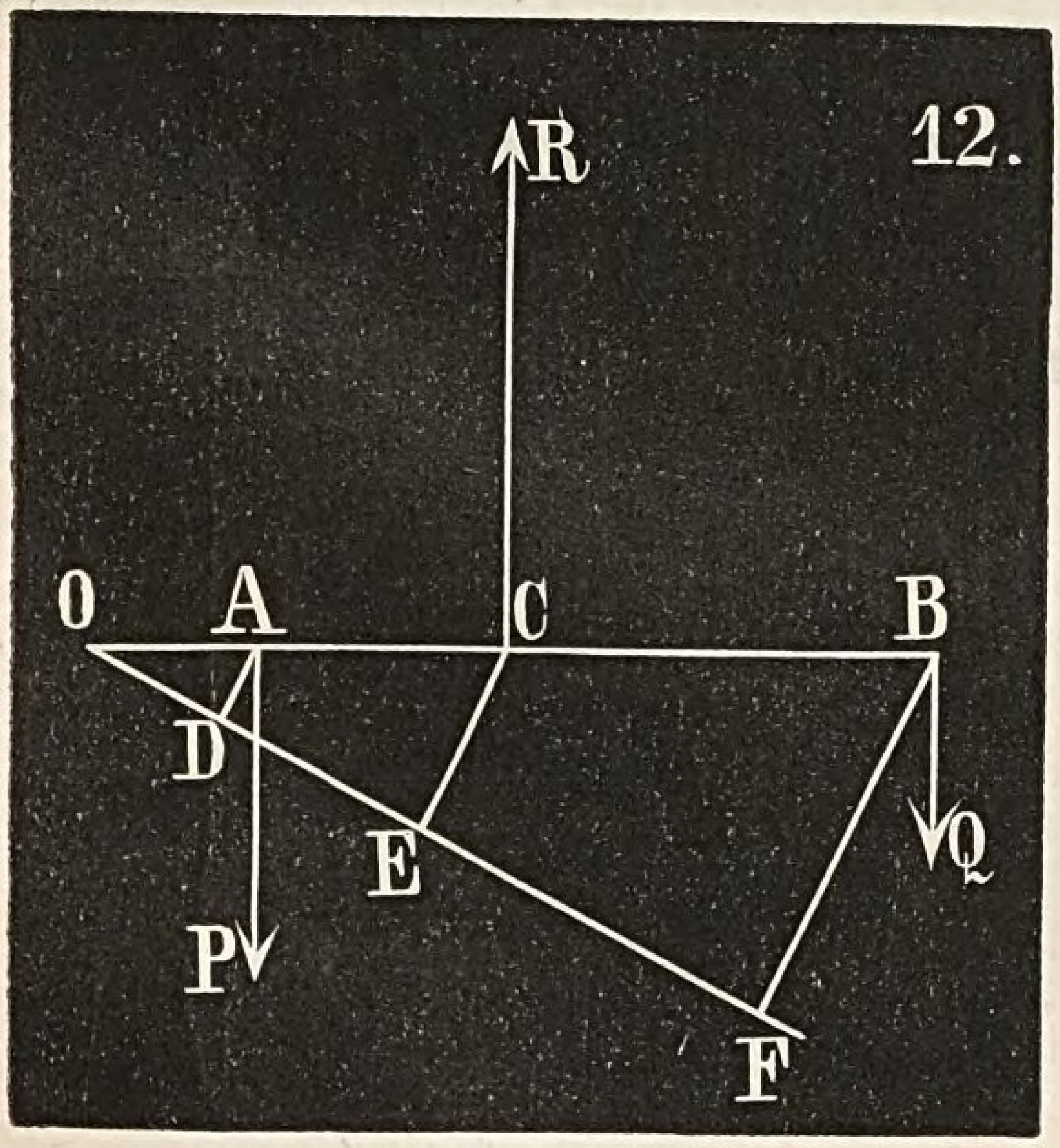
§ 35. Zusatz. Machen die Kräfte P und Q mit der Geraden AB einen Winkel $= \alpha$ und zerlegen wir diese Kräfte in

die rechtwinkeligen Komponenten $P \cos \alpha$, $P \sin \alpha$, $Q \cos \alpha$, $Q \sin \alpha$, so ist die Wirkungsweise einer jeden Kraft eine zweifache. Die Komponenten $P \cos \alpha$, $Q \cos \alpha$ fallen in die Richtung AB und streben die Angriffspunkte A und B längs AB zu bewegen; die zu AB senkrechten Komponenten $P \sin \alpha$, $Q \sin \alpha$ dagegen streben AB um den Punkt C zu drehen mit einer Intensität gleich ihren Momenten. Der Zustand des Gleichgewichts bleibt auch bei dieser Vorstellung unverändert, indem auch jetzt noch die obigen Bedingungen (§ 31)

$$R \cos \alpha = P \cos \alpha + Q \cos \alpha \text{ und}$$
$$AC \cdot P \sin \alpha = BC \cdot Q \sin \alpha$$

erfüllt sind. Weil aber bei dieser dem natürlichen Vorgange allein entsprechenden Vorstellung nicht $AC \cdot P$, sondern $AC \cdot P \sin \alpha$ das wirksame Moment ist, so verstehen wir auch in der Folge unter Moment einer Kraft immer das rechtwinkelige, welches auch die Richtungen von P und Q sein mögen.

§ 36. **Lehrsatz.** Zwei antiparallele Kräfte an einer Geraden haben nur in dem einen Fall eine Resultante, wenn sie der Größe nach ungleich sind.



Beweis. Sind (Fig. 12) die Kräfte P und R gegeben, und nehmen wir an, es könne durch eine Einzelkraft Q im Punkte B Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen nach § 31 und 33 in Beziehung auf die Punkte A und C die Bedingungsgleichungen

$$AB \cdot Q = AC \cdot R$$
$$AC \cdot P = BC \cdot Q$$

zugleich erfüllt sein, woraus durch Ableitung folgt

$$(1)\ Q = R - P, \text{ und } (2)\ BC = \frac{AC \cdot P}{R - P}.$$

So lange $R \gtrless P$, sind beide Werte möglich und auch vollkommen bestimmt; ist aber $R = P$, so wird $BC = \infty$, d. h. unmöglich, und die beiden Kräfte haben in diesem Falle keine Resultante.

§ 37. **Erklärung.** Zwei antiparallele Kräfte, welche keine Resultante haben, heißen ein Kräftepaar, wovon im nächsten Kapitel die Rede sein soll.

§ 38. **Erklärung.** Um die bisherigen Resultate auf beliebig viele parallele Kräfte auszudehnen und unter den allgemeinen Gesichtspunkt der Rechnung zu bringen, ist es notwendig, den Kräften analog den Zahlen Vorzeichen beizulegen. Ist (Fig. 12) P und Q positiv, so ist R negativ. Aehnlich verhält es sich mit den Momenten derselben. Denn ist

$$AC \cdot P = BC \cdot Q,$$

so folgt entweder

$$-AC \cdot P + BC \cdot Q = 0, \text{ oder } AC \cdot P - BC \cdot Q = 0,$$

d. h. nimmt man die eine Strecke positiv, so ist die andere negativ, weil beide Kräfte dasselbe Vorzeichen haben. Nehmen wir daher vom Punkte C ausgehend, CB die Strecke rechter Hand positiv, so ist jedesmal CA d. h. die Strecke linker Hand negativ zu nehmen. Mit diesen Bestimmungen läßt sich in allen Fällen das Vorzeichen des Momentes mit Sicherheit angeben und auf diese Weise die Summe der Kräfte und ihrer Momente algebraisch herstellen.

In Beziehung auf Punkt A sind die Strecken AC und AB positiv; dagegen BC und BA in Beziehung auf B negativ. Wenn wir $P + P_1 + P_2 + \ldots.$ die algebraische Summe der Kräfte heißen, so soll damit gesagt sein, daß die Kräfte sowohl positiv als negativ sein können, im übrigen aber wie Zahlen addiert werden.

§ 39. **Folgerung.** Reduzieren wir die Gleichungen des § 30 auf Null, so haben wir in Rücksicht auf vorstehende Bestimmungen

(1) $- R + P + Q = o$; (2) $- AC \cdot P + BC \cdot Q = o$

(3) $AB \cdot Q - AC \cdot R = o$; (4) $- BA \cdot P + BC \cdot R = o$

d. h. halten sich drei parallele Kräfte an einer Geraden Gleichgewicht, so ist die algebraische Summe sowohl der Kräfte, als auch ihrer Momente in Beziehung auf jeden der drei Angriffspunkte gleich Null.

§ 40. **Lehrsatz.** Halten sich drei parallele Kräfte an einer Geraden Gleichgewicht, so ist in Beziehung auf j e d e n P u n k t dieser Geraden die algebraische Summe sowohl der Kräfte als Momente gleich Null.

Beweis. Daß die algebraische Summe der Kräfte $= o$ ist, folgt aus dem vorigen §; desgleichen ist

$$- AC \cdot P + BC \cdot Q = o.$$

Ist nun O ein beliebiger Punkt auf AB, so folgt in Rücksicht auf Figur 12

$$AC = OC - OA, \text{ und } BC = OB - OC;$$

mithin durch Substitution dieser Werte

$$- (OC - OA)P + (OB - OC)Q = o; \text{ oder}$$

$$- OC \cdot P + OA \cdot P + OB \cdot Q - OC \cdot Q = o; \text{ oder}$$

$$OA \cdot P + OB \cdot Q - OC\,(P + Q) = o; \text{ oder}$$

$$OA \cdot P + OB \cdot Q - OC \cdot R = o,$$

was zu beweisen war.

§ 41. Zusatz. Stellen wir die Resultate des vor. § in der früheren Form

(1) $R = P + Q$; (2) $OC \cdot R = OA \cdot P + OB \cdot Q$,

(3) $Q = R - P$; (4) $OB \cdot Q = OC \cdot R - OA \cdot P$

dar, so heißt das, vom Gesichtspunkte der algebraischen Summe aus betrachtet:

Z w e i i r g e n d w i e p a r a l l e l e K r ä f t e a n e i n e r G e r a d e n l a s s e n s i c h s t e t s d u r c h e i n e E i n z e l k r a f t g l e i c h i h r e r a l g e b r a i s c h e n S u m m e, u n d d i e S u m m e i h r e r M o m e n t e d u r c h d a s M o m e n t i h r e r R e s u l t a n t e, a u f d e n s e l b e n P u n k t O b e z o g e n, e r s e t z e n.

§ 42. **Lehrsatz.** Die Resultante beliebig vieler irgendwie parallelen Kräfte an einer Geraden ist gleich der algebraischen

Summe der gegebenen Kräfte; dieselbe hat ein Moment gleich der algebraischen Summe der gegebenen Momente, auf denselben Punkt O der Geraden bezogen; d. h. es ist

(1) $R = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$

(2) $xR = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$,

wenn wir mit a die Entfernung* der Kräfte und mit x die Entfernung der Resultante vom Punkte O bezeichnen.

Beweis. Ersetzen wir nach dem vorigen § je zwei Kräfte der Reihe nach durch ihre Resultante R_1, R_2, R_3 ...., so haben wir die leicht verständlichen Gleichungen

$$\begin{aligned} R_1 &= P_0 + P_1 \\ R_2 &= R_1 + P_2 \\ R_3 &= R_2 + P_3 \\ &\vdots \\ R &+ R_{n\text{-}1} + P_n \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition

$$R = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen der Hülfskräfte R_1, R_2 .... beziehungsweise mit x_1, x_2 u. s. w., so haben wir ferner

$$\begin{aligned} x_1R_1 &= a_0P_0 + a_1P_1 \\ x_2R_2 &= x_1R_1 + a_2P_2 \\ x_3R_3 &= x_2R_2 + a_3P_3 \\ &\vdots \\ x\cdot R &= x_{n\text{-}1}R_{n\text{-}1} + a_nP_n; \text{ oder durch Addition} \\ \hline x\cdot R &= a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n. \end{aligned}$$

§ 43. Zusatz. Wird $R = o$, so haben die Kräfte keine Resultante; hat in diesem Falle das Produkt $x \cdot R$ einen von Null verschiedenen Wert $= m$, so wird $x = \frac{m}{0} = \infty$ und das ganze System reduziert sich auf ein Kräftepaar. Ist aber R nicht

* Die Gerade, an der die Kräfte angreifen, wird in Uebereinstimmung mit § 35 senkrecht zur Kraftrichtung vorausgesetzt, ohne jedoch notwendig daran gebunden zu sein.

gleich Null, wie z. B. wenn alle Kräfte in demselben Sinne parallel sind, so haben die Kräfte stets eine Resultante, welche der Größe und Richtung nach durch Gl. (1) bestimmt ist, und in einem Punkte angreift, der von O die Entfernung = x hat, welcher Wert aus Gl. (2) sich ergibt.

§ 44. **Lehrsatz.** Die Momenten-Gleichung zwischen beliebigen parallelen Kräften an einer Geraden und ihrer Resultante bleibt ungestört, wenn statt der Entfernungen der Angriffspunkte vom Punkte O ihre Projektionen auf eine beliebige Gerade eingeführt werden.

Beweis. Ziehen wir (Fig. 12) die willkürliche Gerade OF und fällen aus A, C, B Senkrechte auf OF und setzen $\angle$ BOF = α, so ist

$$OA \cos\alpha = OD;\ OC \cos\alpha = OE;\ OB \cos\alpha = OF;$$

andrerseits ist nach der Voraussetzung

$$OC \cdot R = OA \cdot P + OB \cdot Q;\ \text{also auch}$$

$$OC \cos\alpha \cdot R = OA \cos\alpha \cdot P + OA \cos\alpha \cdot Q;$$

mithin durch Substitution der vorigen Werte

$$OE \cdot R = OD \cdot P + OF \cdot Q.$$

Dieser Schluß läßt sich auf beliebig viele Kräfte ausdehnen und ist auch dann noch giltig, wenn die Gerade OF die AB nicht schneidet, jedoch fest mit ihr verbunden ist.

§ 45. Zusatz. Ist (Fig. 12) BOF eine starre Verbindung und halten sich die Kräfte an der Geraden AB Gleichgewicht, so bleibt ihr Gleichgewicht ungestört, wenn die Angriffspunkte beziehungsweise nach D, E, F verlegt werden. Mit dieser Verlegung kann man die Vorstellung verbinden, die Kräfte P, R, Q wirken sowohl durch die Momente OD·P, OE·R, OF·Q, als auch durch die Momente AD·P, CE·R, BF·Q. Während die ersteren in Beziehung auf ein und denselben Punkt O genommen sind, erscheinen die letzteren in Beziehung auf die Punkte A, C, B genommen, welche Punkte derselben Geraden OB angehören. Wir können deshalb letztere Vorstellung von der ersteren durch die Bezeichnung Momente in Beziehung auf eine Gerade unterscheiden. Das nämliche gilt auch umgekehrt von den Punkten D,

E, F. Obwohl das Gleichgewicht dieser letzteren Momente, da unsere Vorstellung an der realen Wirkungsweise der Kräfte nichts ändern kann, von selbst einleuchtet, wenn das der ersteren gegeben ist, so läßt sich dies auch direkt beweisen.

§ 46. **Lehrsatz.** Die Gleichheit der Momente zwischen irgendwie parallelen Kräften an einer Geraden AB und ihrer Resultante in Beziehung auf einen Punkt O bleibt ungestört, wenn alle Momente in Beziehung auf eine beliebige mit AB fest verbundene Gerade oder Ebene OF genommen werden.

Beweis. Sind (Fig. 12) P und Q die gegebenen Kräfte, R ihre Resultante, so ist nach § 41 (2)

$$OC \cdot R = OA \cdot P + OB \cdot Q; \text{ mithin auch}$$

$$OC \sin \alpha \cdot R = OA \sin \alpha \cdot P + OB \sin \alpha \cdot Q; \text{ oder}$$

$$EC \cdot R = DA \cdot P + FB \cdot Q.$$

wenn α den Winkel BOF bezeichnet.

Zusatz. Halten sich irgendwie parallele Kräfte an einer Geraden AB Gleichgewicht, so sind ihre Momente in Beziehung auf eine mit AB fest verbundene Gerade oder Ebene OF gleichfalls im Gleichgewicht. Die feste Verbindung der Angriffspunkte A, B, C . . . . unter sich läßt sich durch die Lote DA, EC, FB . . . . ersetzen.

§ 47. **Lehrsatz.** Kräfte, welche in demselben Sinne parallel an einem beliebigen Punktesystem wirken, haben unter allen Umständen eine Resultante gleich ihrer Summe, und einen bestimmbaren Kräftemittelpunkt.

Beweis. Liegen die Angriffspunkte im Raume, so lassen sich alle in ein und dieselbe Ebene verlegen. Seien nun P_0, P_1, P_2, P_3 parallele Kräfte, deren Angriffspunkte A, B, C, D in einer Ebene liegen, welche dem System angehört, so lassen sich P_0 und P_1 durch ihre Mittelkraft R_1 im Punkte O_1, ebenso R_1 und P_2 durch ihre Mittelkraft R_2 im Punkte O_2, endlich R_2 und P_3 durch R im Punkte O ersetzen.

Demnach ist O Kräftemittelpunkt und

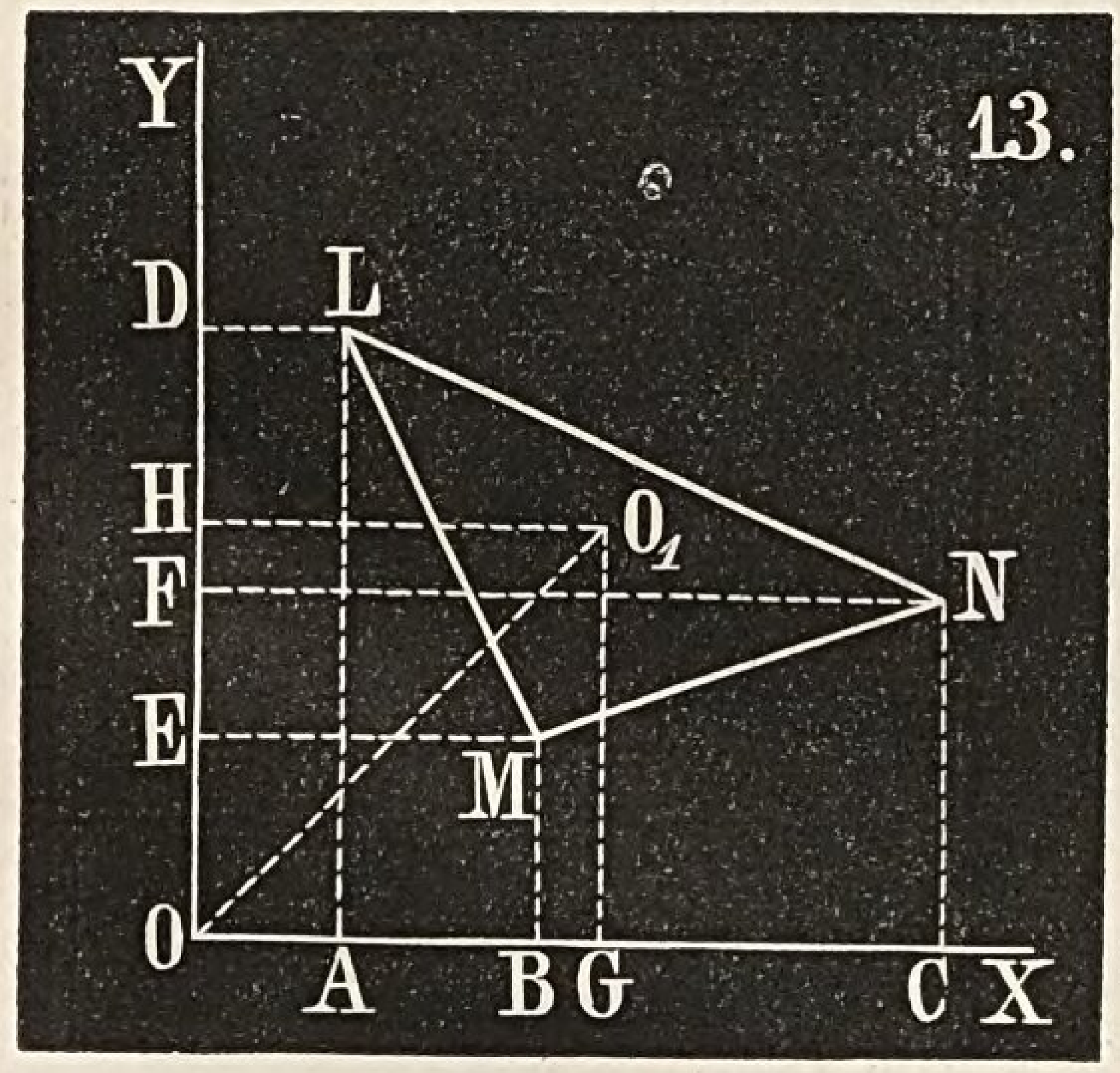
$$R_1 = P_0 + P_1; \; R_2 = R_1 + P_2; \; R = R_2 + P_3; \text{ mithin}$$

$$R = P_0 + P_1 + P_2 + P_3.$$

Diese Zusammensetzung läßt sich unbeschränkt auf noch so viele Kräfte ausdehnen.

§ 48. Zusatz. Sind unter den parallelen Kräften auch antiparallele inbegriffen, so haben nach Lehrsatz die ersteren eine Resultante P und die letzteren ebenfalls eine Resultante Q unter sich. In diesem Falle ist das ganze System auf zwei Kräfte P und Q reduziert, welche antiparallel sind und in dem einzigen Falle keine Resultante haben, wenn (§ 36) P = Q ist, ohne daß ihre Angriffspunkte zusammenfallen. In jedem andern Falle hat das System eine Resultante R = P — Q d. i. gleich der algebraischen Summe der gegebenen Kräfte.

§ 49. **Lehrsatz.** Das Moment der Resultante eines beliebigen Systems irgendwie paralleler Kräfte ist gleich der algebraischen Summe aus den Momenten der gegebenen Kräfte, alle Momente entweder in Beziehung auf irgend eine Gerade genommen, oder auf irgend eine Gerade projiciert.



Beweis. Seien (Fig. 13) P, P_1, P_2 drei parallele Kräfte, deren Angriffspunkte L, M, N in der Ebene LMN liegen, R ihre Resultante, O_1 ihr Angriffspunkt, OX und OY zwei senkrechte, sonst beliebige Gerade, welche in derselben Ebene liegen und mit ihr fest verbunden sein sollen. Ziehen wir aus den Angriffspunkten Senkrechte auf OX und OY, so ist zu beweisen, daß stattfindet

$$(1) \quad O_1G \cdot R = AL \cdot P + BM \cdot P_1 + CN \cdot P_2$$

$$(2) \quad \begin{cases} OG \cdot R = OA \cdot P + OB \cdot P_1 + OC \cdot P_2 & \text{(Proj. auf OX)} \\ OH \cdot R = OD \cdot P + OE \cdot P_1 + OF \cdot P_2 & \text{(„ „ OY)} \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit R_1 die Resultante aus P und P_1, deren Angriffspunkt auf LM zwischen L und M liegt, mit x_1 ihre Entfernung von OX, so haben wir nach § 46

$$x_1 \cdot R_1 = AL \cdot P + BM \cdot P_1$$
$$O_1G \cdot R = x_1 R_1 \quad + CN \cdot P_2, \text{ folglich}$$
$$\overline{O_1G \cdot R = AL \cdot P + BM \cdot P_1 + CN \cdot P_2.}$$

Nun ist aber OD = AL also auch $OD \cdot P = AL \cdot P$, und in der That würde die Kraft P in D angebracht, die Gerade OX mit derselben Intensität zu drehen streben, als in L (§ 35). Aehnlich verhält es sich mit den übrigen Kräften, so daß wir in vorstehender Gleichung BM = OE, CN = OF u. s. w. setzen dürfen. Damit wird

$$OH \cdot R = OD \cdot P + OE \cdot P_1 + OF \cdot P_2.$$

Was von OY gilt, gilt auch rücksichtlich OX.

Sind mehr als drei Kräfte gegeben, deren Angriffspunkte beliebig im Raume liegen, so kann man die Angriffspunkte entweder in die Ebene LMN verlegen, oder die Entfernungen vom Punkte O direkt auf OX projicieren und § 42 in Anwendung bringen. Die Richtung der Kräfte gegen die Ebene LMN ist dabei ganz gleichgiltig und man kann sie sowohl senkrecht darauf, als auch mit ihr zusammenfallend annehmen.

§ 50. **Bestimmung des Kräftemittelpunktes durch Rechnung.** Der Angriffspunkt O der Resultante R ist vollkommen bestimmt, wenn die Strecken OG und OH bekannt sind. Denn es ist, wenn wir Winkel $O_1OG = \alpha$ setzen

$$OO_1 = \sqrt{OG^2 + OH^2}; \quad \text{tang } \alpha = \frac{O_1G}{OG} = \frac{OH}{OG}.$$

Setzen wir

$$OA = a_0, \; OB = a_1, \; OC = a_2 \text{ u. s. w.}$$
$$OD = b_0, \; OE = b_1, \; OF = b_2 \text{ u. s. w.}$$

sowie OG = x und OH = y, so haben wir in Rücksicht auf die vorausgehenden §§ für beliebig viele parallele Kräfte

$$(1) \quad R = P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$
$$(2) \quad x \cdot R = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$
$$(3) \quad y \cdot R = b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$$

Hieraus folgt

$$(4)\ x = \frac{a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n}{P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n}$$

$$(5)\ y = \frac{b_0P_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n}{P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_n};\ \text{mithin}$$

$$(6)\ OO_1 = \sqrt{x^2 + y^2};\ (7)\ \text{tang}\ \alpha = \frac{y}{x}.$$

Dadurch ist die Lage von O_1 vollkommen bestimmt. Wären die Angriffspunkte nicht in einer Ebene gelegen, so läge O_1 im Raume, und es wäre in diesem Falle die senkrechte Entfernung dieses Punktes von der Ebene LMN zur vollständigen Bestimmung erforderlich. Zugleich geben vorstehende Gleichungen auch darüber Aufschluß, ob das System eine Resultante hat oder nicht. Vergl. § 65.

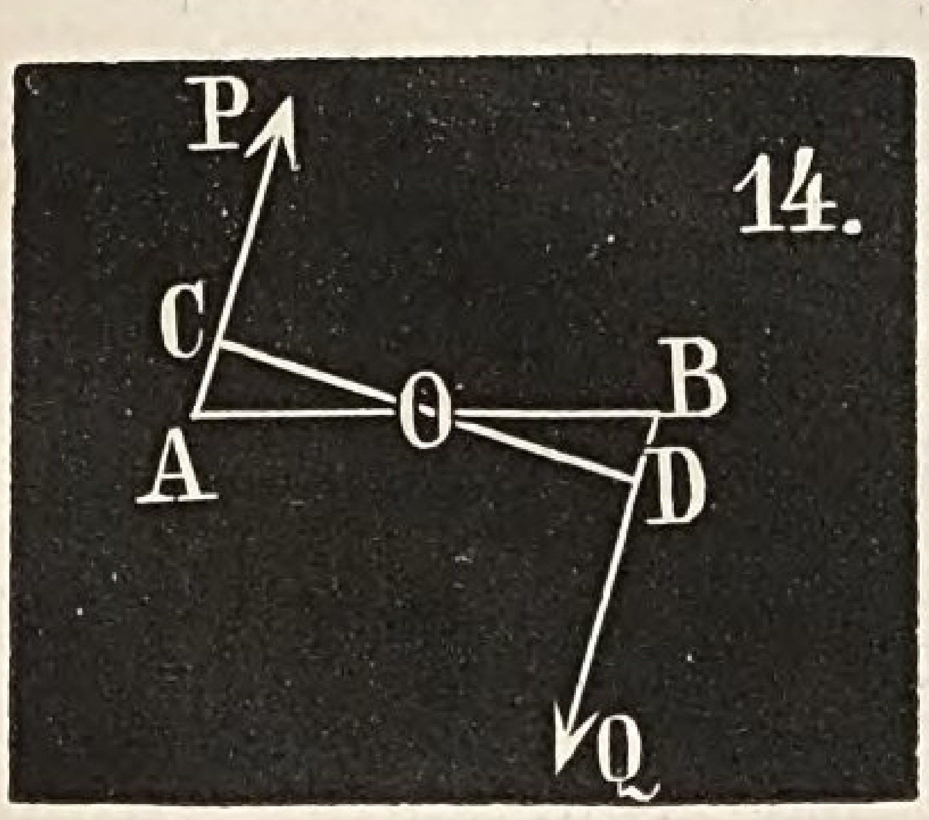
Drittes Kapitel.

Von den Kräftepaaren.

§ 51. **Erklärung.** Bilden die Richtungen der Kräfte eines Paares mit der Geraden der Angriffspunkte einen rechten Winkel, so heißt das Kräftepaar rechtwinkelig, außerdem schiefwinkelig.

§ 52. **Lehrsatz.** Jedes schiefwinkelige Kräftepaar läßt sich durch ein rechtwinkeliges ersetzen.

Beweis. Greifen (Fig. 14) die gleichen und antiparallelen Kräfte (P=Q) in den Punkten A und B an und ziehen wir durch den Mittelpunkt O von AB auf die Richtungen der Kräfte eine Senkrechte CD, so lassen sich nach § 10 die Angriffspunkte nach C und D verlegen, ohne die Wirkung der Kräfte zu ändern; folglich kann das gegebene Kräftepaar durch das in CD wirkende rechtwinkelige Paar ersetzt werden.



In der Folge heißt CD der Arm, das Produkt CD·P das Moment und O der Mittelpunkt des Kräftepaares.

§ 53. **Lehrsatz.** Die Größe der Wirkung eines Kräftepaares ist durch sein Moment ausgedrückt.

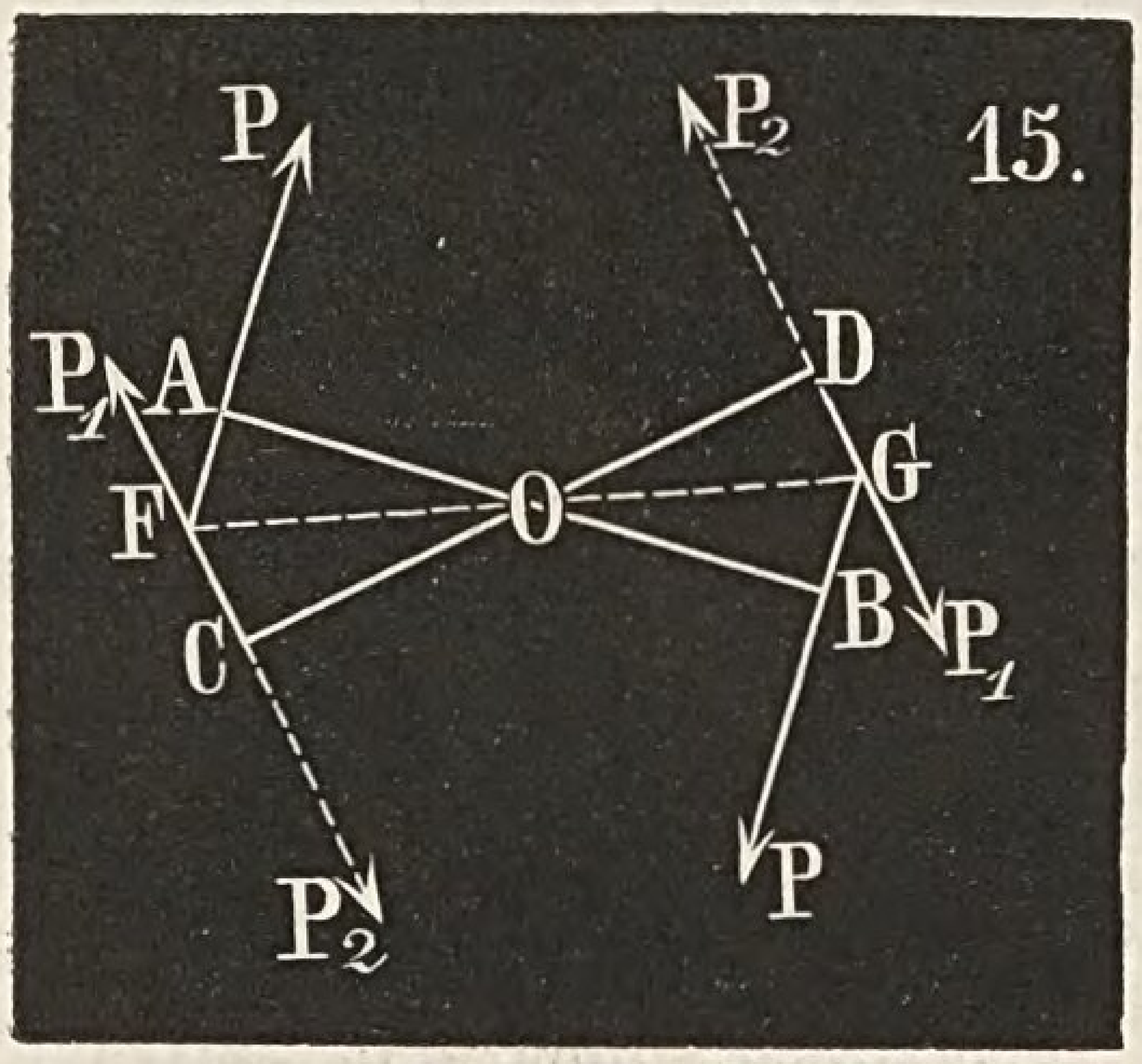
Denn da beide Kräfte das System CD (Fig. 14) um den Mittelpunkt O zu drehen streben, so kann man sich den Punkt O auch fest vorstellen. In Beziehung auf diesen Punkt hat aber P ein Moment $= OC \cdot P$, und Q ein Moment $= OD \cdot Q$. Weil aber $P = Q$ und beide Momente in demselben Sinne wirken, so ist das Moment aus beiden Kräften gleich ihrer Summe, also

$$= OC \cdot P + OD \cdot Q = (OC + OD)\, P = CD \cdot P.$$

§ 54. Zusatz. Es fällt in die Augen, daß es bei jedem Kräftepaare außer seinem Moment auch noch auf die Drehungsrichtung ankommt und daß es nur rechts- und linksdrehende Paare geben kann. Da die einen den anderen direkt entgegengesetzt sind, so genügt es analog § 38 die einen als positiv, die andern als negativ in Rechnung zu bringen.

§ 55. **Lehrsatz.** Ein Kräftepaar läßt sich um seinen Mittelpunkt um einen beliebigen Winkel drehen, ohne seine Wirkung zu ändern.

Beweis. Sei (Fig. 15) $AB \cdot P$ das gegebene Paar. Legen wir durch den Mittelpunkt O einen zweiten Arm $CD = AB$ und bringen wir in C und D zwei neue und gleiche Kräfte $P_1 = P_2 = P$ senkrecht auf CD an, so heben sich P_1 und P_2 sowohl in C als D auf und ändern das gegebene Paar nicht. Denken wir uns andererseits die Kraft P und P_2 nach ihren Schnittpunkten F und G verlegt, so haben sie, wie leicht einzusehen ist je eine Resultante in der Richtung FO und GO, welche sich notwendig aufheben, weil sie gleich und entgegengesetzt sind, und wir haben P_1 am Arme CD allein wirksam. Weil aber durch Einführung der zwei Hülfspaare das gegebene Paar in seiner



Wirkung nicht gestört wird, so muß es einerlei sein, entweder das gegebene oder das übrig gebliebene Paar wirken zu lassen; mithin ist

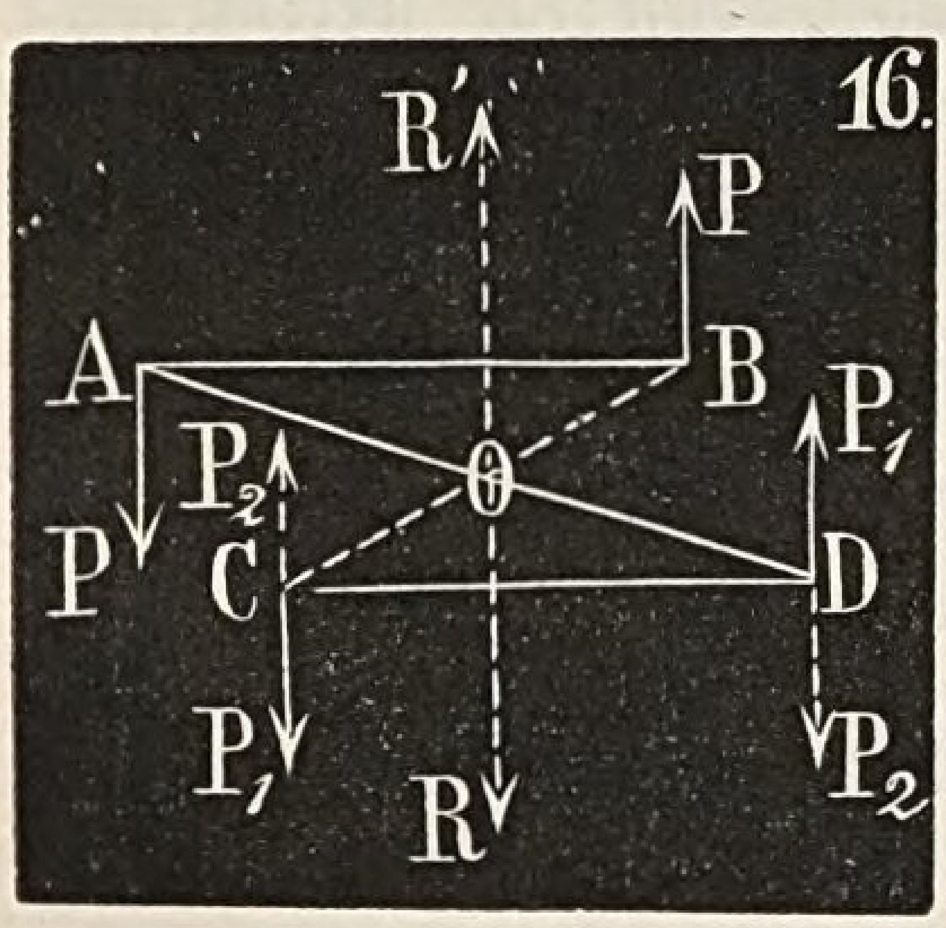
$$AB \cdot P = CD \cdot P_1 = CD \cdot P,$$

welche Lage CD gegen AB auch haben mag.

Zusatz. Haben zwei Kräftepaare gleiches Moment und denselben Mittelpunkt, so ist ihre Gesammtwirkung entweder gleich dem doppelten Momente eines jeden, oder gleich Null, je nachdem beide in gleichem oder entgegengesetztem Sinne drehend sind.

§ 56. **Lehrsatz.** Ein Kräftepaar darf ohne Aenderung seiner Wirkungsweise parallel zu sich selbst verschoben werden.

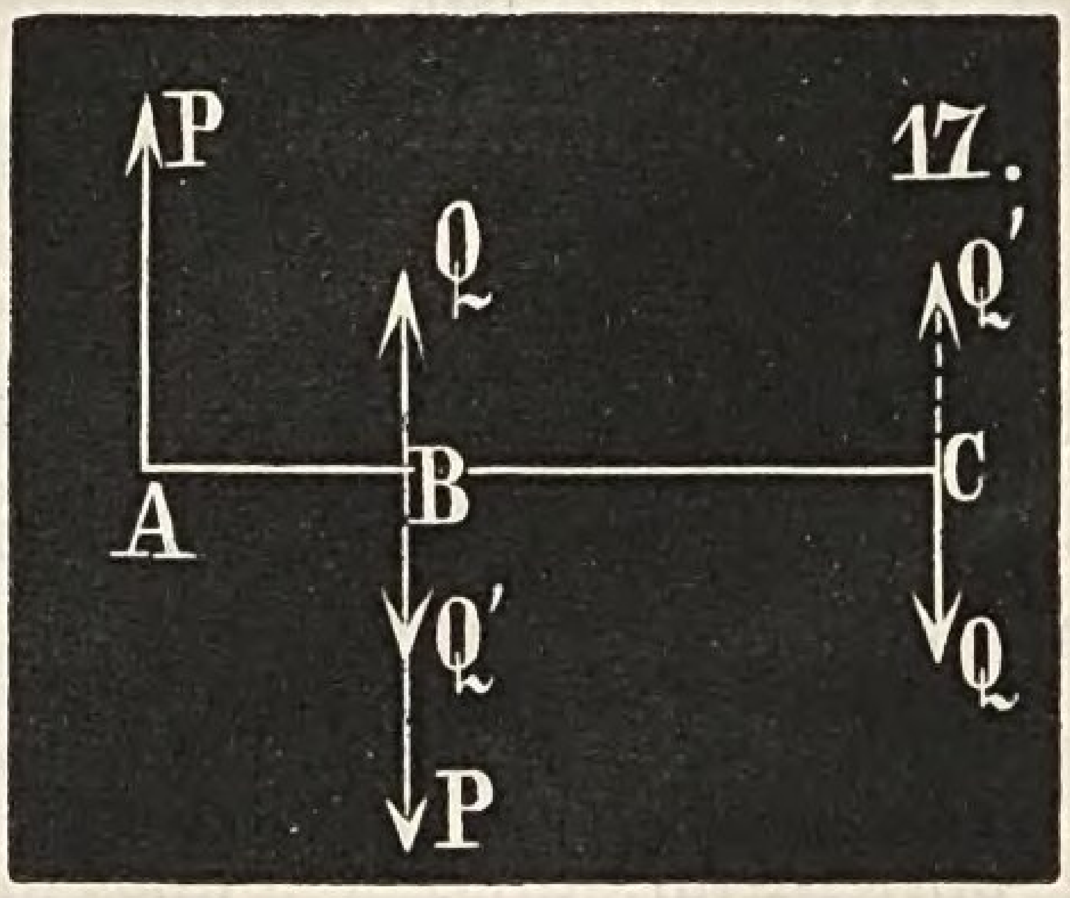
Beweis. Es sei (Fig. 16) CD $=$ und $\parallel$ AB, und die



in C und D senkrecht auf CD angebrachten Hülfskräfte $P_1 = P_2 = P$, außerdem A mit D und B mit C starr verbunden, so heben sich die eingeführten neuen Kräfte gegenseitig auf und ändern die Wirkung des gegebenen Paares $AB \cdot P$ nicht. Andrerseits lassen sich die in A uud D wirkenden Kräfte P und P_2 durch ihre Resultante $R = P + P_2$ im Mittelpunkt O ersetzen; desgleichen die beiden in B und C wirkenden P und P_2 durch ihre Resultante $R' = P + P_2$ in demselben Punkte O. Die Kräfte R und R' heben sich aber auf; mithin bleibt nur die Kraft P_1 an dem Arm CD allein wirksam. Durch diese zweite Kombination wird aber die erste, daß nämlich das Moment $AB \cdot P$ in seiner Wirkung ungestört bleibt, nicht aufgehoben; folglich ist es einerlei, entweder das Moment $AB \cdot P$ oder $CD \cdot P_1$ sich thätig vorzustellen; also kann eins das andere ersetzen.

§ 57. **Lehrsatz.** Haben zwei Kräftepaare parallele, aber ungleiche Arme, so kann eins das andere ersetzen, wenn ihre Momente der Größe und Richtung nach gleich sind.

Beweis. Ist $AB \cdot P = BC \cdot Q$ gegeben, so lassen sich beide Momente, weil ihre Arme $\parallel$ sind, so verschieben, daß ihre Arme



in eine Gerade AC (Fig. 17) fallen. Bringen wir in B und C die Kraft $Q' = Q$ in entgegengesetzter Richtung von Q an, so heben sich in B und C die Kräfte Q und Q' gegenseitig auf, so daß das Moment $AB \cdot P$ allein wirksam bleibt. Andrerseits haben aber die in A und C wirkenden Kräfte P und Q' eine Resultante $R = P + Q'$, welche nach § 28 in B angreift, indem der Voraussetzung zufolge

$$P : Q' = BC : AB$$

stattfindet. Dieser Kraft R wirkt in B eine andere Kraft $R = P + Q'$ entgegen, und wird daher von ihr wirkungslos gemacht, so daß das Moment $BC \cdot Q$ allein wirksam bleibt. Demnach läßt sich das neu eingeführte Moment $BC \cdot Q'$ sowohl durch $BC \cdot Q$, als auch durch $AB \cdot P$ aufheben; folglich bringen beide gleiche Wirkungen hervor d. h. sie können sich gegenseitig ersetzen.

§ 58. **Zusammensetzung der Kräftepaare. Lehrsatz.** Alle an einem staaren Punktesystem thätigen Kräftepaare lassen sich auf ein einziges zurückführen.

Beweis. Nach dem Vorgetragenen können wir

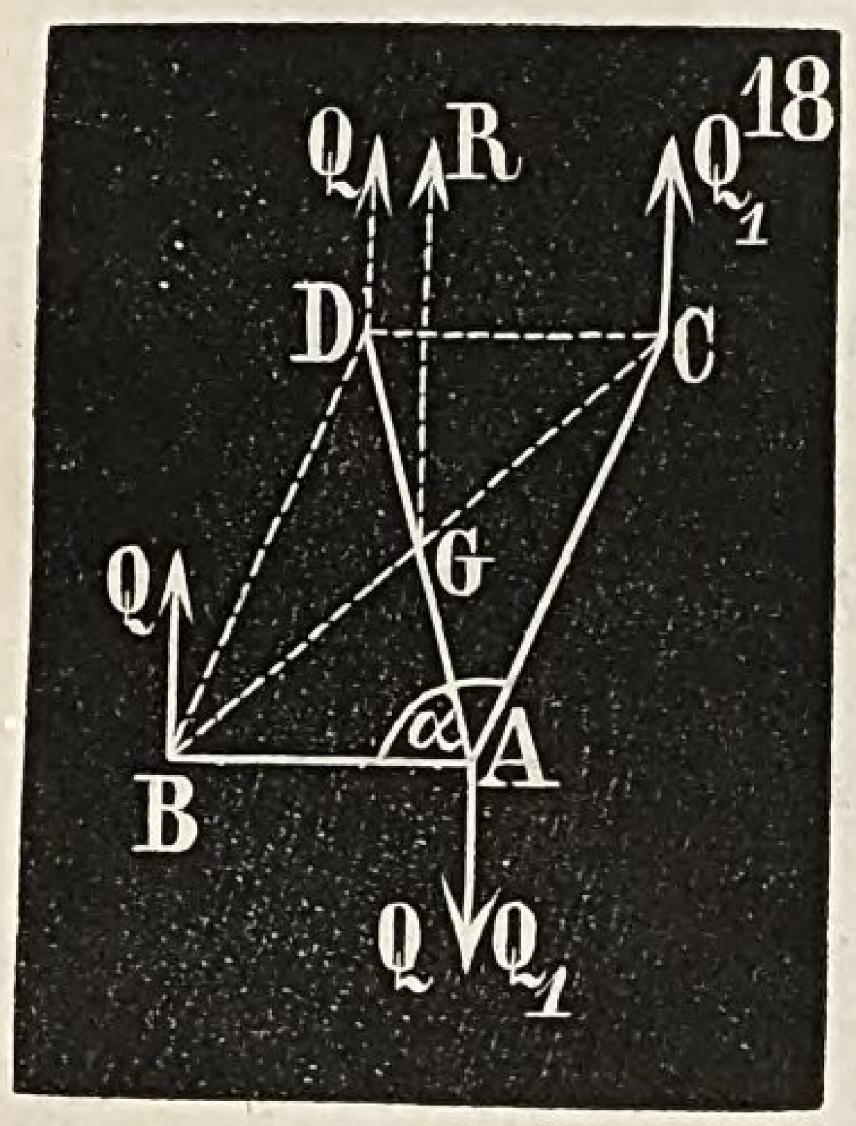
1) alle Paare als rechtwinkelig voraussetzen;
2) jedes Paar um seinen Mittelpunkt drehen, bis die Richtungen aller Kräfte in parallele Gerade fallen;
3) jedes Paar parallel zu sich selbst verschieben, bis alle Arme in einer Ebene liegen.

Nun werden die Arme in diesem Zustande einander parallel sein oder nicht.

I. Alle jene Arme, welche $\#$ sind, lassen sich wiederum verschieben, bis sie in der nämlichen Geraden liegen und ihre Mittelpunkte in einem Punkt O zusammenfallen. Endlich können nach § 57 alle Paare auf den Arm AB reduziert werden, so daß alle Kräfte nur in den zwei Punkten A und B thätig sind. Haben nun die Kräfte in A eine Resultante $= R$, so haben

jene in B dieselbe Resultante der Größe nach und antiparallel der Richtung nach; und es ist somit das ganze System auf ein einziges Kräftepaar zurückgeführt, dessen Moment = AB·R ist.

II. Die nicht parallelen Arme lassen sich so lange ∦ zu sich selbst verschieben, bis alle einen Angriffspunkt A gemein haben; hierauf läßt sich jedes Paar nach § 57 so reduzieren, daß alle Paare gleiche Kräfte haben. Gebrauchen wir bei der Verschiebung noch die Vorsicht, daß nur solche Punkte in A sich vereinigen, deren Kräfte nach derselben Seite hin wirken, so veranschaulicht Fig. 18 eine Zusammensetzung der Paare AB·Q und AC·Q_1, welche sowohl für rechts- als linksdrehende Paare giltig ist. Nun haben die Kräfte in A eine Resultante R = Q + Q_1 = 2Q; desgleichen die zwei in B und C angreifenden eine Resultante R = Q + Q_1, welche in G der Mitte von BC angreift. Wir haben demnach in A und G zwei gleiche und antiparallele Kräfte wirksam, also ein einziges Kräftepaar = AG·R = AG·2Q = 2AG·Q statt der zwei gegebenen Paare. Auf dieselbe Weise läßt sich dieses letztere Paar mit einem dritten zu einem einzigen Paare vereinigen, und dieses Verfahren so lange fortsetzen, bis alle Paare auf ein einziges zurückgeführt sind.



Es ist somit in allen Fällen möglich, die gegebenen Paare auf ein einziges zu reduzieren.

§ 59. Zusatz. Die Resultate der vorigen Betrachtung lassen sich auch durch Rechnung feststellen.

I. Für parallele Arme. Bezeichnen wir analog § 50 die gegebenen Kräfte mit P, P_1, P_2 ...., deren Arme mit a, a_1, a_2 ..., die reduzierten Kräfte mit Q, Q_1, Q_2 .... und setzen den gemeinschaftlichen Arm AB = b, so haben wir

$$b \cdot Q = a \cdot P;\quad b \cdot Q_1 = a_1 \cdot P_1;\quad b \cdot Q_2 = a_2 \cdot P_2 \text{ u. s. w. oder}$$

$$Q = \frac{aP}{b};\quad Q_1 = \frac{a_1 P_1}{b};\quad Q_2 = \frac{a_2 P_2}{b} \text{ u. s. w.}$$

Ist auf diese Weise die Größe der reduzierten Kräfte gefunden, so ist ihre Resultante in den Punkten A und B gleich ihrer algebraischen Summe; also

$$R = Q + Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n, \text{ oder}$$

$$R = \frac{aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n}{b}; \text{ oder auch}$$

$$(1)\ b \cdot R = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

d. h. das Moment der Resultante am Arme AB ist gleich der algebraischen Summe der gegebenen Momente, auf ein und denselben Punkt O bezogen.

II. Sind die Arme nicht parallel, so haben wir alle Kräfte auf die Größe Q zu reduzieren und den entsprechenden Arm b zu bestimmen. Wir haben daher

$$b \cdot Q = aP;\ b_1 \cdot Q = a_1P_1;\ b_2 \cdot Q = a_2P_2 \text{ u. s. w.}$$

$$b = \frac{aP}{Q};\quad b_1 = \frac{a_1P_1}{Q};\quad b_2 = \frac{a_2P_2}{Q} \text{ u. s. w.}$$

Um nun (Fig. 18) das resultierende Moment $2AG \cdot Q$ zu bestimmen, sei $BD \mathbin{\#} AC$ und $CD \mathbin{\#} AB$; dann ist $2AG = AD$; folglich

$$2AG \cdot Q = AD \cdot Q.$$

Setzen wir $\angle\ CAB = \alpha$, so ist AD durch

$$AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cos \alpha$$

und somit auch $AD \cdot Q$ bestimmt. Der Arm AD wird demnach gerade so bestimmt, als wären die Linien AB und AC zwei unter dem Winkel α wirkende Kräfte. Umgekehrt kann das Moment $AD \cdot Q$ in die Momente $AB \cdot Q$ und $AC \cdot Q$ gerade so zerlegt werden, wie eine Kraft in ihre Componenten. Aus diesem Grunde ist es für die Rechnung vorteilhafter, analog § 24 die reduzierten Arme sämmtlich auf zwei senkrechte Richtungen zu projizieren und aus der algebraischen Summe der Projektionen das resultierende Kräftepaar abzuleiten, wie es in § 24 auseinandergesetzt wurde. Bezeichnen wir wie dort mit X und Y die algebraische Summe aus den Projektionen und mit $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Richtungswinkel der Arme, so ist schließlich

$$X = b \cos \alpha + b_1 \cos \beta + b_2 \cos \gamma + \ldots.$$
$$= \frac{aP \cos \alpha + a_1 P_1 \cos \beta + a_2 P_2 \cos \gamma + \ldots.}{Q}$$
$$Y = b \sin \alpha + b_1 \sin \beta + b_2 \sin \gamma + \ldots.$$
$$= \frac{aP \sin \alpha + a_1 P_1 \sin \beta + a_2 P_2 \sin \gamma + \ldots.}{Q}$$

woraus als resultierendes Paar folgt

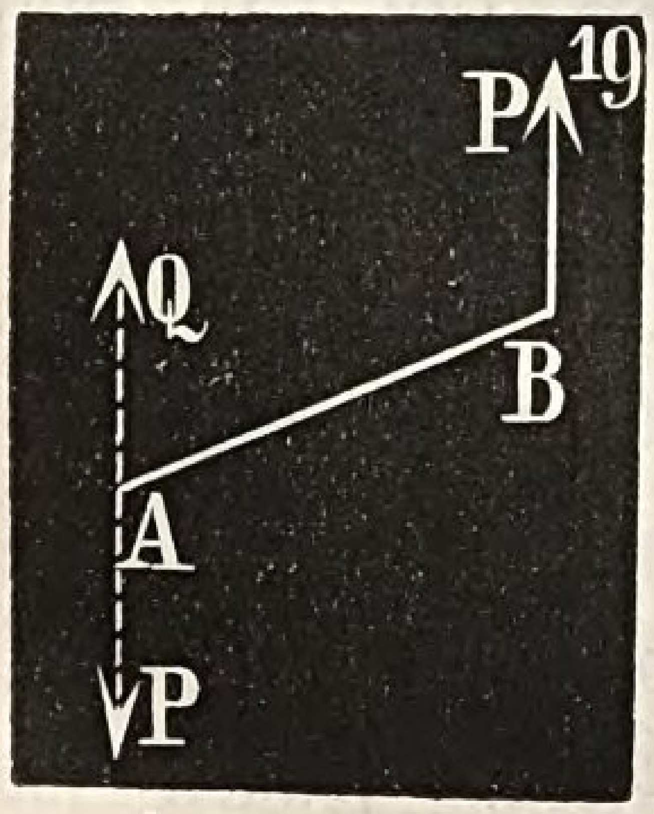
$$(2)\ Q \sqrt{X_2 + Y_2}.$$

§ 60. **Gleichgewichtsbedingungen für Kräftepaare.** Sind die gegebenen Kräftepaare im Gleichgewicht, so folgt aus dem vor. § für parallele Arme wegen R = o, daß die algebraische Summe der reduzierten Kräfte Q, oder die algebraische Summe der Momente aP gleich Null sein muß. Sind die Arme nicht ∦, so folgt aus (2), da Q als willkürliche Größe nicht Null sein kann, daß X und Y d. h. die algebraische Summe aus den Projektionen der Arme auf zwei senkrechte Gerade zugleich Null sein muß.

Viertes Kapitel.

Gleichgewichtsbedingungen für ein freies starres System von Punkten.

§ 61. **Allgemeine Reduktion der Kräfte. Lehrsatz.** Alle Kräfte, welche ein festverbundenes System von Punkten irgend wie angreifen, lassen sich auf eine Einzelkraft und ein Kräftepaar zurückführen.



Beweis. Die Wirkung der Kraft P, welche (Fig. 19) den Punkt B angreift, wird nicht geändert, wenn wir in einem beliebigen Punkte A, der übrigens mit B fest verbunden sein muß, zwei neue Kräfte anbringen, welche ∥ und = P und in ihrer Richtung entgegengesetzt sind. Andrerseits können wir uns auch

vorstellen, in A wirke eine Einzelkraft Q und am Arme AB ein Kräftepaar = AB·P. So wie P kann aber jede der gegebenen Kräfte durch eine Einzelkraft in A und ein Kräftepaar ersetzt werden, dessen Arm mit A verbunden ist. Auf diese Weise erhalten wir ebensoviele Kräfte an einem Punkte A und Kräftepaare, als Kräfte gegeben sind. Alle Kräfte in A lassen sich nach § 22 auf eine einzige Kraft R, und alle Kräftepaare nach § 58 und 59 auf ein einziges Paar = a·Q reduzieren.

§ 62. Zusatz. Da nun die Einzelkraft R das Moment a·Q nicht aufheben kann, so bestehen im Allgemeinen die Bedingungen des Gleichgewichts für ein starres System darin, daß die Kraft R und das Moment a·Q zugleich verschwinden.

§ 63. **Gleichgewicht paralleler Kräfte in einer Ebene.**

Lehrsatz. Zum Gleichgewichte paralleler Kräfte, welche in ein und derselben Ebene an einem freien Systeme fest verbundener Punkte wirken, ist es notwendig und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe der Kräfte und
2) die algebraische Summe ihrer Momente in Beziehung auf irgend einen Punkt derselben Ebene verschwindet.

Bew. Ziehen wir von dem beliebigen Punkte O eine Gerade senkrecht zur Richtung der parallelen Kräfte, so können wir alle Angriffspunkte in diese Gerade verlegen, und wir haben parallele Kräfte an einer Geraden, wofür wir in § 42 folgende zwei Gleichungen aufgestellt haben

$$(1) \quad R = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$
$$(2) \quad x \cdot R = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

Sollen nun die Kräfte im Gleichgewichte sein, so muß sowohl R, als auch ihr Moment x·R Null werden, was mit dem Wortlaut des Lehrsatzes übereinstimmt. Siehe § 43.

§ 64. Zusatz. Sind die gegebenen Kräfte nicht im Gleichgewicht, aber so beschaffen, daß durch Einführung einer Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden kann, so muß diese Kraft gleich und entgegengesetzt der Resultante R sein. Fügen wir

daher zu den gegebenen Kräften die Kraft $-$ R, so müssen dem Lehrsatz zufolge die zwei Gleichungen

$$(1) \quad -R + P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 0$$

$$(2) \quad -x \cdot R + aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n = 0$$

zugleich erfüllt sein; außerdem kann das System nicht durch eine Einzelkraft, sondern nur durch ein Kräftepaar (§ 61) ins Gleichgewicht gebracht werden. Dieses wäre der Fall, wenn die algebraische Summe der Kräfte allein, nicht aber die der Momente Null würde. Vergl. § 43.

§ 65. **Lehrsatz.** Wird ein ebenes Punktesystem von irgendwie parallelen Kräften angegriffen, so ist zum Gleichgewichte erforderlich und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe der Kräfte;
2) die algebraische Summe ihrer Momente, auf zwei senkrechte Gerade projiziert, zugleich verschwindet.

Beweis. Nehmen wir an, die gegebenen Kräfte haben eine Resultante R, so haben wir nach § 50 die Bedingungsgleichungen

$$(1) \quad R = P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n$$

$$(2) \quad xR = aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots + a_nP_n$$

$$(3) \quad yR = bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$$

Weil aber die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen, so muß sowohl R, als auch xR und yR Null werden, was mit der Behauptung des Lehrsatzes übereinstimmt.

§ 66. Zusatz. Sind die Kräfte nicht im Gleichgewicht und es kann durch eine Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen analog § 64 die drei Gleichungen

$$(1) \quad -R + P + P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 0$$

$$(2) \quad -xR + aP + a_1P_1 + a_2P_2 + \ldots a_nP_n = 0$$

$$(3) \quad -yR + bP + b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots b_nP_n = 0$$

zugleich erfüllt sein. Wäre $R = 0$ und $xR = p$ oder $yR = q$, so könnte (§ 43) durch ein Kräftepaar Gleichgewicht hergestellt werden.

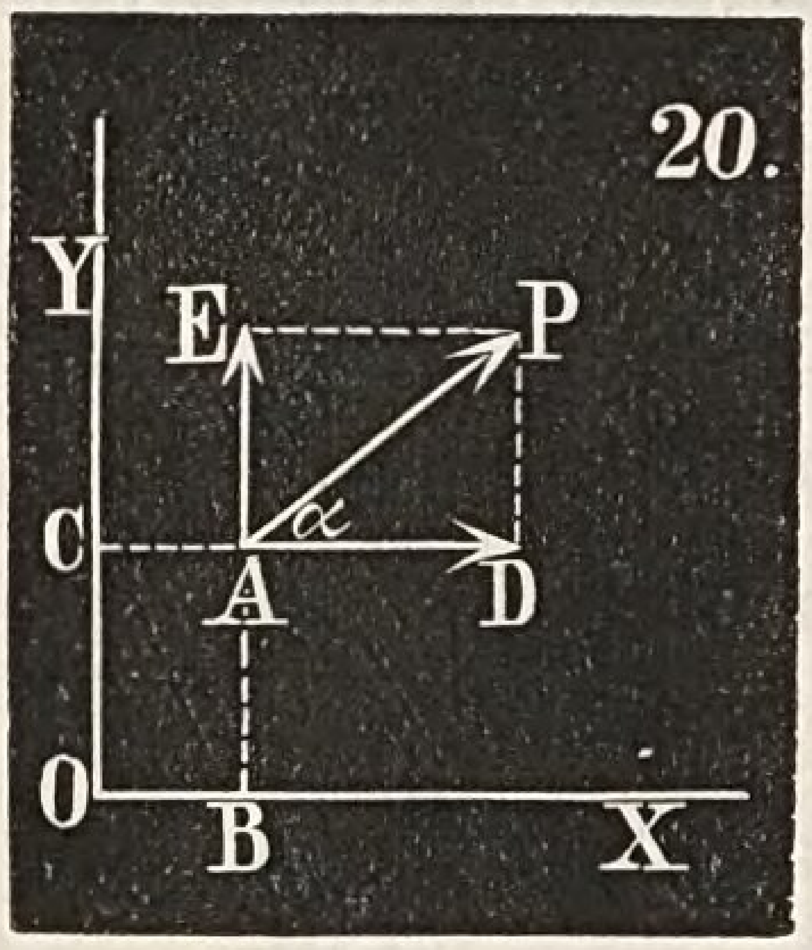
Anm. Die Resultate der § 65 und 66 bleiben auch noch giltig, wenn die Angriffspunkte nicht mehr in einer Ebene liegen.

§ 67. **Gleichgewichtsbedingungen für beliebige Kräfte in einer Ebene. Lehrsatz.**

Zum Gleichgewichte beliebiger Kräfte in einer Ebene ist es erforderlich und hinreichend, daß

1) die algebraische Summe ihrer Projektionen auf zwei senkrechte Gerade OX und OY;
2) das resultierende Kräftepaar aus den auf OX und OY projizierten Momenten in Beziehung auf den Schnittpunkt O zugleich verschwindet.

Beweis. Sei P (Fig. 20) eine beliebige Kraft in der Ebene XOY, α ihr Richtungswinkel mit OX, und A ihr Angriffspunkt, so können wir P in zwei rechtwinkelige Componenten P cos α, P sin α zerlegen und ihre Angriffspunkte nach C und B verlegen, und zugleich § 61 entsprechend in O vier gleiche und parallele Kräfte anbringen. Dadurch erhalten wir zwei Kräfte P cos α, P sin α in O und zwei Kräftepaare, nämlich a·P sin α in OX und b·P cos α in OY, wenn wir, wie bisher, OB = a und OC = b setzen. Diese zwei Paare sind sowohl in Fig. 20 als auch in jedem anderen Falle in ihren Wirkungen entgegengesetzt und überdieß so beschaffen, daß sie sich durch Drehen und Verschieben nach § 59, I auf das einzige Paar



$$aP \sin \alpha - bP \cos \alpha = P\,(a \sin \alpha - b \cos \alpha)$$

reduzieren lassen. Wir haben demnach die Kraft P in A durch zwei Kräfte in O und ein Kräftepaar ersetzt.

Zerlegen wir die übrigen Kräfte, deren Richtungswinkel $\beta, \gamma, \delta \ldots$ sein mögen, auf dieselbe Art, so haben wir ebensoviele Kräfte in O parallel OX und OY wirkend, und Kräftepaare, als Kräfte gegeben sind. Nehmen wir einen Augenblick an, die Kräfte haben eine Resultante R, welche mit OX einen Winkel = φ bildet, so haben wir notwendig, wenn x und y analog § 50 den Angriffspunkt von R bezeichnen

$$(1)\ R \cos\varphi = P \cos\alpha + P_1 \cos\beta + P_2 \cos\gamma + \ldots = X$$
$$(2)\ R \sin\varphi = P \sin\alpha + P_1 \sin\beta + P_2 \sin\gamma + \ldots = Y$$
$$(3)\ R\,(x \sin\varphi - y \cos\varphi) = P\,(a \sin\alpha - b \cos\alpha) +$$
$$+ P_1\,(a_1 \sin\beta - b_1 \cos\beta) + P_2\,(a_2 \sin\gamma - b_2 \cos\gamma) + \ldots = Z.$$

Weil aber der Voraussetzung zufolge das System im Gleichgewicht ist und $\sin\varphi$ nicht zugleich mit $\cos\varphi$ Null werden kann, so muß notwendig $R = o$ sein.

§ 68. Zusatz. Ist das System nicht im Gleichgewicht und kann durch Einführung einer Einzelkraft Gleichgewicht hergestellt werden, so müssen analog § 66 durch Hinzufügen der Kraft $-R$ die vorigen 3 Gleichungen zugleich verschwinden. Um R der Größe und Richtung nach zu bestimmen, haben wir aus (1) und (2)

$$(1)\ R = \sqrt{X_2 + Y_2};\ (2)\ \text{tang}\ \varphi = \frac{Y}{X}.$$

Zur Bestimmung von x und y haben wir ferner

$$(3)\ xR \sin\varphi = aP \sin\alpha + a_1P_1 \sin\beta + a_2P_2 \sin\gamma + \ldots = p$$
$$(4)\ yR \cos\varphi = bP \cos\alpha + b_1P_1 \cos\beta + b_2P_2 \cos\gamma + \ldots = q;$$

mithin $(5)\ x = \frac{p}{R \sin\varphi} = \frac{p}{Y};\quad (6)\ y = \frac{q}{R \cos\varphi} = \frac{q}{X}.$

Somit ist die Resultante vollkommen bestimmt.

§ 69. Zusatz. Wären beliebige Kräfte im Raume gegeben, so hätten wir die Betrachtungen des § 67 auf drei Ebenen auszudehnen, also im Allgemeinen 6 Gleichungen mit ebensovielen Unbekannten zu behandeln.

Fünftes Kapitel.

Vom Schwerpunkt.

§ 70. Jeder sich selbst überlassene Körper fällt erfahrungsgemäß zu Boden in einer Richtung*, welche jedesmal dem Mittel-

* Diese Richtung heißt vertikal oder lotrecht, die darauf senkrechte horizontal oder wagrecht.

punkt der Erde zugekehrt ist. Die Ursache dieser Erscheinung ist die Anziehungskraft der Erde, welche Schwerkraft oder Schwere genannt wird. Diese Kraft ist so wesentlich mit der Materie eines jeden Körpers verbunden, daß sie durch nichts von ihr getrennt, wohl aber durch eine ihr gleiche Gegenkraft aufgehoben werden kann, wie dies im Zustande der Ruhe der Fall ist. Diese Kraft zieht nicht bloß den Körper überhaupt, sondern jedes Massenteilchen desselben mit der gleichen Intensität an. In einem Körper, den wir uns aus n Massenteilchen bestehend vorstellen, sind auch n Kräfte thätig, deren Richtungen nach dem Mittelpunkte der Erde konvergieren. Obwohl die Schwerkraft mit der Entfernung vom Mittelpunkte veränderlich wird, so ist doch die Erhebung unsres Spielraumes über die Erdoberfläche gegen den Erdradius so gering, daß wir an einem bestimmten Orte nicht bloß diese Kraft konstant, sondern auch die Kraftrichtungen der einzelnen Massenteilchen parallel betrachten dürfen. Weil nach § 47 n parallele Kräfte stets eine Mittelkraft haben, so können wir uns auch vorstellen, ein jeder Körper werde nur von einer Kraft angezogen, welche der Summe aller einzelnen Kräfte gleich und ihren Angriffspunkt im Mittelpunkt der parallelen Kräfte hat. Jede Kraft, welche einen Körper im Fallen hindert, muß dieser Mittelkraft gleich und entgegengesetzt sein.

Beim Aufhängen offenbart sich diese Kraft als Spannung, im Ruhen auf einer Unterlage als Druck. Ein jeder Körper kann nur einen solchen Punkt haben und dieser Punkt heißt Schwerpunkt des Körpers. Der Schwerpunkt eines Körpers ist daher nichts anderes, als der Angriffspunkt der Mittelkraft oder auch der Gegenkraft, durch welche der Körper in Ruhe erhalten wird. Da es nun einerlei ist, alle Einzelkräfte oder nur ihre Mittelkraft thätig zu denken, die Wirksamkeit dieser letzteren Kraft aber dieselbe bleibt, wenn wir alle Massenteilchen des Körpers in ihrem Angriffspunkt vereinigt denken, so folgt daraus, daß, solange nur die Schwere allein wirkt und insbesondere keine Drehung des Körpers stattfindet, jeder feste Körper als bloßer Punkt behandelt werden kann, dessen Masse in seinem Schwer-

punkt verdichtet ist, vorausgesetzt, daß die Lage des Schwerpunktes jedesmal bestimmt werden kann.

Dieses Letztere erfordert in den meisten Fällen eine höhere Kenntniß der Mathematik; wir müssen uns daher nur auf jene einfachen Fälle beschränken, welche unsere Hilfsmittel nicht übersteigen.

§ 71. **Masse und Gewicht.** Die Größe oder Intensität, mit welcher ein Körper von der Erde angezogen wird, heißt sein Gewicht. Bezeichnen wir dasselbe mit G, die Masse des Körpers mit m, die der Erde mit M, den Radius derselben mit r und mit q eine Constante*, so haben wir nach dem allgemeinen Anziehungsgesetze

$$G = q.\frac{mM^{**}}{r^2}$$

als Ausdruck des Gewichtes eines Körpers. Für einen zweiten Körper vom Gewichte g und Masse m_1 ist analog

$$g = q.\frac{m_1 M}{r^2}; \text{ mithin}$$

$$(1)\ G : g = m : m_1$$

d. h. die Gewichte der Körper verhalten sich wie ihre Massen.

Aus einem später einzusehenden Grunde hat man diejenige Masse als Einheit angenommen, welche ein Gewicht

$$g = 9{,}80896 \text{ Kilogramm}$$

hat. Setzen wir daher $m_1 = 1$, so haben wir fortan als einfache Beziehung zwischen Masse und Gewicht aus (1)

$$(2)\ G = mg; \text{ oder } m = \frac{G}{g}, \text{ d. h.}$$

man erhält die Masse eines Körpers, wenn man sein Gewicht durch die constante Zahl 9,80896 dividiert.

§ 72. **Bestimmung des Schwerpunktes.** Vor allem setzen wir die betrachteten Körper als homogon d. h. als solche voraus,

---

* Die Constante q bedeutet die Größe der Anziehung zweier der Einheit gleichen Massen in einer Entfernung gleich der Längeneinheit.

** Mit derselben Intensität wird auch die Erde vom Körper angezogen. Vergl. § 146 und 147.

deren Masse in allen Punkten gleichartig und gleichmäßig verteilt ist. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für einzelne Körper der Schwerpunkt von selbst, wie z. B. für die Gerade, den Kreis, das Parallelogramm, die Kugel, den Cylinder, das Parallelepiped und für die regulären Polyeder, bei welchen Körpern der Schwerpunkt jedesmal mit dem geometrischen Mittelpunkt zusammenfällt. Denn jede durch diesen Punkt gezogene Gerade wird geometrisch halbiert, so daß nach dem Begriffe der statischen Momente die Massenteilchen der einen Hälfte denen der andern notwendig Gleichgewicht halten.

§ 73. **Allgemeine Regeln zur Bestimmung des Schwerpunktes.**

1) Da bei homogonen Körpern gleiche Volumen auch gleiche Massen enthalten, so werden gleiche Volumen desselben Körpers von der Erde gleich stark angezogen und haben daher auch gleiches Gewicht. Kann man also einen homogenen Körper geometrisch halbieren und die Schwerpunkte A und B der beiden Hälften bestimmen, so liegt der Schwerpunkt des ganzen Körpers notwendig in der Mitte von AB.

2) Kann man einen Körper so halbieren, daß die Massenteilchen der einen symmetrisch gegen die der andern Hälfte liegen, so liegt der Schwerpunkt in der halbierenden Ebene oder Geraden. Läßt sich dieses mehrmals ausführen, so liegt der Schwerpunkt im Schnittpunkt der den Körper halbierenden Ebenen oder Geraden.

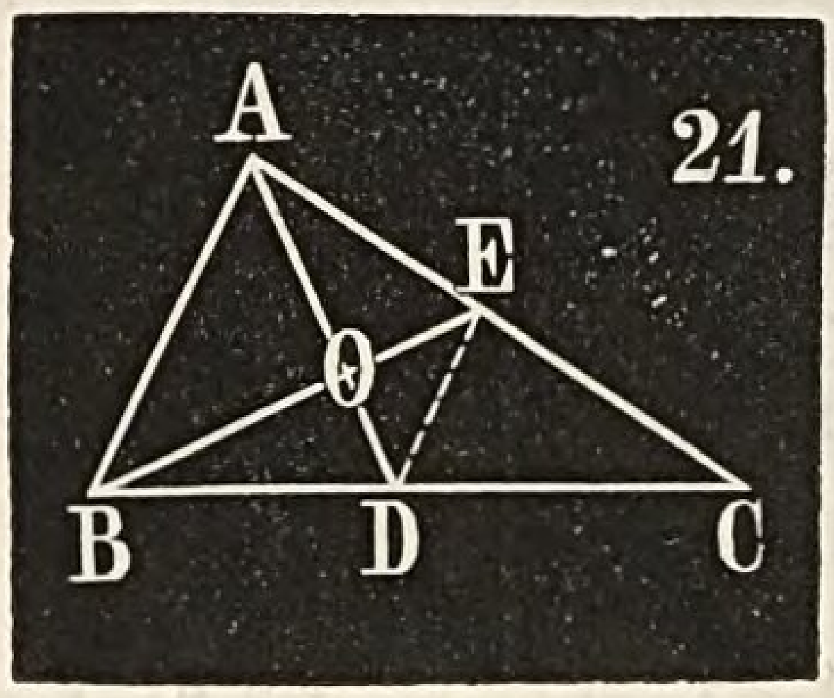
3) Zerlegt man den Körper in zwei ungleiche Teile vom Gewichte P und Q und sind beziehungsweise A und B ihre Schwerpunkte, so liegt der Schwerpunkt des Körpers auf der Geraden AB in einem Punkte C, welcher entweder durch die Gleichung

$$AC \cdot P = BC \cdot Q \text{ (§ 28), oder durch}$$

$$OC\,(P + Q) = OA \cdot P + OB \cdot Q \text{ (§ 41 Gl. 2),}$$

oder nach § 49 durch Momentengleichungen in Beziehung auf zwei beliebige Gerade bestimmt ist.

§ 74. **Schwerpunkt eines Dreieckes. Lehrsatz.** Zieht man von der Spitze A eines Dreieckes (Fig. 21) nach der Mitte D der Basis BC eine Gerade, so liegt der Schwerpunkt O auf AD in einer Entfernung von der Spitze $AO = \frac{2}{3} AD$.



Beweis. Jede zu BC parallele Gerade wird durch AD halbiert; folglich hat jede solche Gerade ihren Schwerpunkt auf AD, somit liegt der Schwerpunkt des Dreieckes selbst auf AD. Aus demselben Grunde muß der Schwerpunkt des Dreieckes auch auf der Geraden BE, welche AC halbiert, liegen. Da nun der Schwerpunkt auf zwei verschiedenen Geraden zugleich liegt, so kann es nur ihr Schnittpunkt O sein.

Ziehen wir ED, so ist $ED \nparallel AB$ und $\triangle ODE \backsim \triangle AOB$; mithin

$$AO : OD = AB : DE$$
$$AB : DE = BC : CD = 2 : 1$$
$$\overline{}$$
$$AO : OD = 2 : 1, \text{ oder}$$
$$AO : AD = 2 : 3; \text{ folglich}$$
$$AO = \tfrac{2}{3} AD.$$

Zusatz 1. Ist h die Höhe des Dreieckes, so ist $\frac{1}{3}$ h die Entfernung des Schnittpunktes von der Basis.

Zusatz 2. Beschreibt die Spitze eines Dreieckes eine der Basis parallele Gerade, so beschreibt der Schwerpunkt gleichfalls eine Gerade $\nparallel$ der Basis.

Zusatz 3. Denken wir uns in O die ganze Masse des Dreieckes ABC, in A nur den dritten Teil derselben konzentriert, so haben beide Massen in Beziehung auf Punkt D gleiche Momente. Denn bezeichnen wir das Gewicht der Masse des Dreieckes mit P, so ist

$$AD \cdot \tfrac{1}{3} P = \tfrac{1}{3} AD \cdot P = OD \cdot P,$$

dasselbe gilt von ihren Momenten in Beziehung auf BC, AC und AB. Denken wir uns in jedem Ecke des Dreieckes den

dritten Teil der Masse vom Gewichte $\frac{1}{3}$ P vereinigt, und nehmen wir ihre Momente in Beziehung auf irgend eine der Basis parallele Gerade HG in der Entfernung x, so haben wir für die Summe der drei Momente, wenn h die Höhe des Dreieckes ist, die identische Gleichung

$$x \cdot \tfrac{1}{3} P + x \cdot \tfrac{1}{3} P + (x + h) \cdot \tfrac{1}{3} P = (x + \tfrac{1}{3} h) \cdot P, \text{ d. h.}$$

das Moment des Dreieckes bleibt dasselbe, ob wir seine Masse im Schwerpunkt konzentriert, oder zu gleichen Teilen in den Ecken verdichtet denken. Dieses bleibt nach § 49 auch noch wahr, wenn GH der BC nicht mehr parallel ist. Sind nun y_1, y_2, y_3 die Entfernungen der Ecken und y die Entfernung des Schwerpunktes O von einer beliebigen Geraden, so ist demzufolge

$$y \cdot P = y_1 \cdot \frac{P}{3} + y_2 \cdot \frac{P}{3} + y_3 \cdot \frac{P}{3}, \text{ oder}$$

$$y = \tfrac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3) = \text{dem arithm. Mittel.}$$

Zusatz 4. Zerlegen wir das Viereck ABCD durch eine Diagonale in die zwei Dreiecke ABC und ACD und bestimmen wir ihre Schwerpunkte O_1 und O_2, so hat der Schwerpunkt O des Viereckes auf $O_1 O_2$ eine solche Lage, daß die Bedingung

$$O_1O : O_2O = \triangle\, ACD : \triangle\, ABC$$

erfüllt sein muß. Vom Viereck kann man auf ein Fünfeck, Sechseck u. s. w. übergehen.

§ 75. **Schwerpunkt eines Trapezes. Lehrsatz.** Verbindet man die Mittelpunkte E und F der parallelen Seiten AD = b und BC = a eines Trapezes durch eine Gerade, so liegt der Schwerpunkt O auf EF in einer Entfernung von b und a, welche beziehungsweise durch

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2a + b}{a + b}, \text{ und } x_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}$$

ausgedrückt ist, wenn h die Höhe des Trapezes bezeichnet.

Beweis. O liegt auf EF, weil EF das Trapez symmetrisch halbiert. Ziehen wir die Diagonale AC und bezeichnen das Gewicht der beiden Dreiecke mit P und Q, das Gewicht der Flächeneinheit mit γ, so ist einerseits nach § 73, 3

$$x\,(P+Q) = \tfrac{2}{3}\,h\,P + \tfrac{1}{3}\,h\,Q \text{ (in Beziehung auf b)}$$
$$x_1\,(P+Q) = \tfrac{1}{3}\,h\,P + \tfrac{2}{3}\,h\,Q \text{ („ „ „ a)}$$

andrerseits $P = \frac{1}{2}\,ah \cdot \gamma$; $Q = \frac{1}{2}\,bh \cdot \gamma$; $P + Q = \frac{1}{2}\,(a+b)\,h \cdot \gamma$. Durch Elimination der Gewichte P und Q erhalten wir die für x und x_1 aufgestellten Werte.

§ 76. **Lehrsatz.** Sind h_2, h_1, h die Höhen eines Dreieckes, so hat der Schwerpunkt des Umfanges desselben beziehungsweise eine Entfernung von den Seiten c, b, a

$$z = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{a+b}{a+b+c};\; y = \frac{h_1}{2} \cdot \frac{a+c}{a+b+c};\; x = \frac{h}{2} \cdot \frac{b+c}{a+b+c}.$$

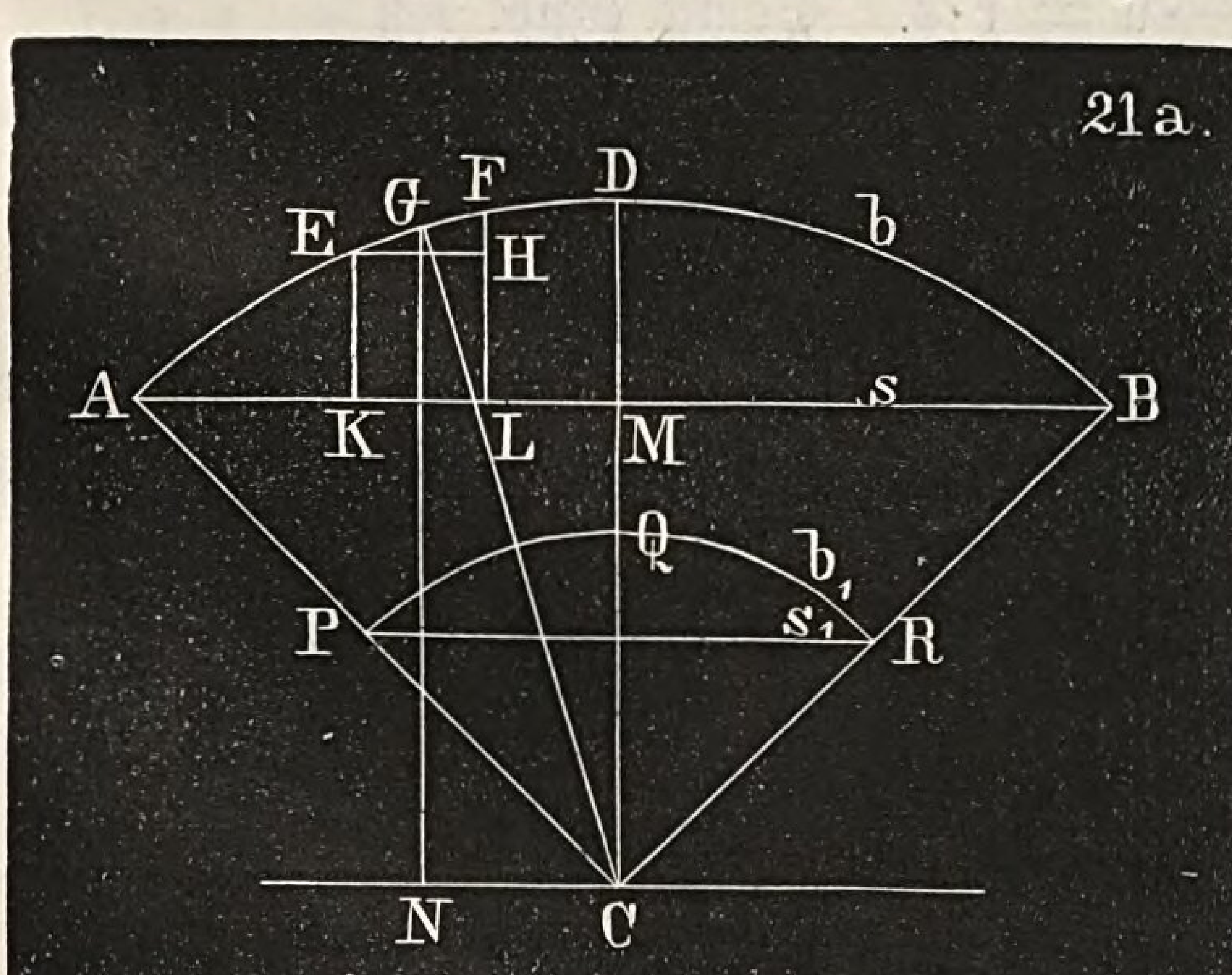
Beweis. Bezeichnen wir mit p, q, r beziehungsweise die Gewichte der drei Seiten a, b, c, mit γ das Gewicht der Längeneinheit, so haben wir einerseits für die Momente in Beziehung auf Seite c nach § 49

$$z\,(p+q+r) = \frac{h_2}{2} \cdot p + \frac{h_2}{2}\,q; \text{ anderseits}$$

$$p = a\gamma;\; q = b\gamma;\; r = c\gamma; \text{ mithin}$$

$$z = \frac{h_2}{2} \cdot \frac{a+b}{a+b+c}$$

§ 77. **Schwerpunkt eines Kreisbogens. Lehrsatz.** Der Schwerpunkt O eines Kreisbogens $\widehat{AB} = b$ (Fig. 21 a) liegt auf dem Radius CD = r, welcher Bogen und Sehne AB = s halbiert, und hat vom Kreismittelpunkt eine Entfernung



$$x = \frac{r \cdot s}{b}.$$

Beweis. O liegt auf CD, weil AB von CD symmetrisch halbiert wird. Teilen wir den Bogen AB in n kleinere Teile und nehmen wir ihre Momente in Beziehung auf eine durch C gezogene Gerade CN $\parallel$ AB, wobei wir der Einfachheit wegen $\gamma = 1$ setzen, so ist nach § 49 das Moment des Bogens $x \cdot b =$ der Summe der Momente aller Bogenteile. Teilen wir daher die Sehne AB = s in n gleiche Teile und errichten in den Teilpunkten Senkrechte wie KE, LF, und ziehen wir aus der Mitte der Bogenteile Senkrechte auf CN wie GN, so ist $GN \cdot EF$ eines von den n zu bildenden Momenten. Ziehen wir noch GC und EH $\perp$ FL, und betrachten wir Bogen EF als eine Gerade, so ist $\triangle$ EFH $\backsim$ $\triangle$ CGN; mithin

$$EF : EH = CG : GN, \text{ oder}$$
$$GN \cdot EF = CG \cdot EH = r \cdot KL.$$

Nun ist aber ex constr. $KL = \frac{AB}{n} = \frac{s}{n}$: mithin

$$GN \cdot EF = \frac{r \cdot s}{n}$$

ein Ausdruck, der für alle Momente derselbe bleibt. Die Summe der n Momente ist daher

$$\frac{r \cdot s}{n} \cdot n = r \cdot s. \text{ Somit ergibt sich}$$
$$x \cdot b = r \cdot s \text{ und hieraus}$$
$$x = \frac{r \cdot s}{b}.$$

Zusatz. Für einen Halbkreis ist $b = r\pi$ und $s = 2r$, folglich

$$x = \frac{2r}{\pi}.$$

§ 78. **Lehrsatz.** Der Schwerpunkt O eines Kreisausschnitts liegt (Fig. 21a) auf dem halbierenden Radius CD und hat vom Mittelpunkt eine Entfernung

$$x = \tfrac{2}{3} \frac{r \cdot s}{b}.$$

Beweis. Zerlegen wir den Kreisausschnitt in n unter sich gleiche Sektoren, so hat jeder als Dreieck betrachtet seinen Schwer-

punkt in einer Entfernung vom Mittelpunkt $= \frac{2}{3}$ r. Denken wir uns die Massen dieser Sektoren in ihren Schwerpunkten konzentriert, so haben wir n gleiche Massenteile, welche sämmtlich auf einem Bogen b′ liegen, der mit einem Radius $= \frac{2}{3}$ r beschrieben ist. Bezeichnen wir die dazu gehörige Sehne mit s′, so hat der gemeinschaftliche Schwerpunkt vom Mittelpunkt die Entfernung (§ 77)

$$x = \frac{2}{3}\frac{r \cdot s'}{b'}.$$

Nun ist aber s′ : b′ = s : b; folglich

$$x = \frac{2}{3}\frac{r \cdot s}{b}.$$

Zusatz. Für einen Halbkreis ist $b = r\pi$, $s = 2r$, mithin $x = \frac{4r}{3\pi}$; für einen Viertelkreis ist analog $x = \frac{4r}{3\pi}\sqrt{2}$.

§ 79. Zusatz. Bezeichnen wir die Schwerpunkte des Sektors, Segments und Dreieckes (Fig. 21 a) mit O, O_1, O_2, so haben wir in Beziehung auf den Mittelpunkt C, wenn $\gamma = 1$ gesetzt wird, nach § 49

$$OC \cdot \text{Sector} = O_1C \cdot \text{Segment} + O_2C \cdot \triangle, \text{ oder}$$

$$\frac{2}{3}\frac{r \cdot s}{b} \cdot \frac{br}{2} = x\left(\frac{br}{2} - \frac{sh}{2}\right) + \frac{2}{3}h \cdot \frac{sh}{2}; \text{ hieraus}$$

$$x = \frac{s^3}{6(br - sh)}$$

worin b den Bogen, s die Sehne und h die Höhe CM des Dreieckes bezeichnet.

§ 80. Zusatz. Aehnlich ergibt sich die Entfernung des Schwerpunktes O_2 eines Kreisringes APRB (Fig. 21 a). Denn sind O, O_1 die Schwerpunkte der Sektoren ABC und PCR, so ist (§ 49)

$$OC \cdot \text{Sector } ACB = O_1C \cdot \text{Sector } PCR + O_2C \cdot \text{Ring, oder}$$

$$\frac{2}{3}\frac{rs}{b} \cdot \frac{br}{2} = \frac{2}{3}\frac{r_1 s_1}{b_1} \cdot \frac{b_1 r_1}{2} + x\left(\frac{br}{2} - \frac{b_1 r_1}{2}\right).$$

In Rücksicht auf die Beziehung $r : s : b = r_1 : s_1 : b_1$ ergibt sich hieraus

$$x = \frac{2s}{3b} \cdot \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2}.$$

§ 81. **Lehrsatz.** Der Schwerpunkt des Mantels eines senkrechten Kegels liegt auf der Axe des Kegels in einer Entfernung von der Spitze $x = \frac{2}{3} h$.

Beweis. Zerlegen wir den Mantel in n Sektoren, so hat jeder derselben seinen Schwerpunkt auf der mittleren Mantellinie l in einer Entfernung $= \frac{2}{3} l$ von der Spitze. Diese n Punkte bilden ein reguläres Polygon, dessen Ebene auf der Axe des Kegels senkrecht steht und dessen Mittelpunkt der gemeinschaftliche Schwerpunkt ist. Dieser Punkt liegt aber in der Axe des Kegels und hat eine Entfernung von der Spitze $= \frac{2}{3} h$.

Zusatz. Aehnlich erhalten wir durch Zulegung des Mantels eines abgekürzten Kegels, dessen Radien R und r sind, Trapeze, deren Schwerpunkte sämmtlich auf der mittleren Mantellinie liegen und einer Kreislinie angehören, deren Ebene auf der Kegelaxe senkrecht steht und die Höhe h in demselben Verhältnisse teilt, wie die Mantellinie l. Der Mittelpunkt dieses Polygons liegt in der Axe und ist Schwerpunkt des Mantels. Nach § 75 haben wir für die Entfernung des Schwerpunktes vom Kreise R

$$x = \frac{h}{3} \cdot \frac{2r + R}{r + R}.$$

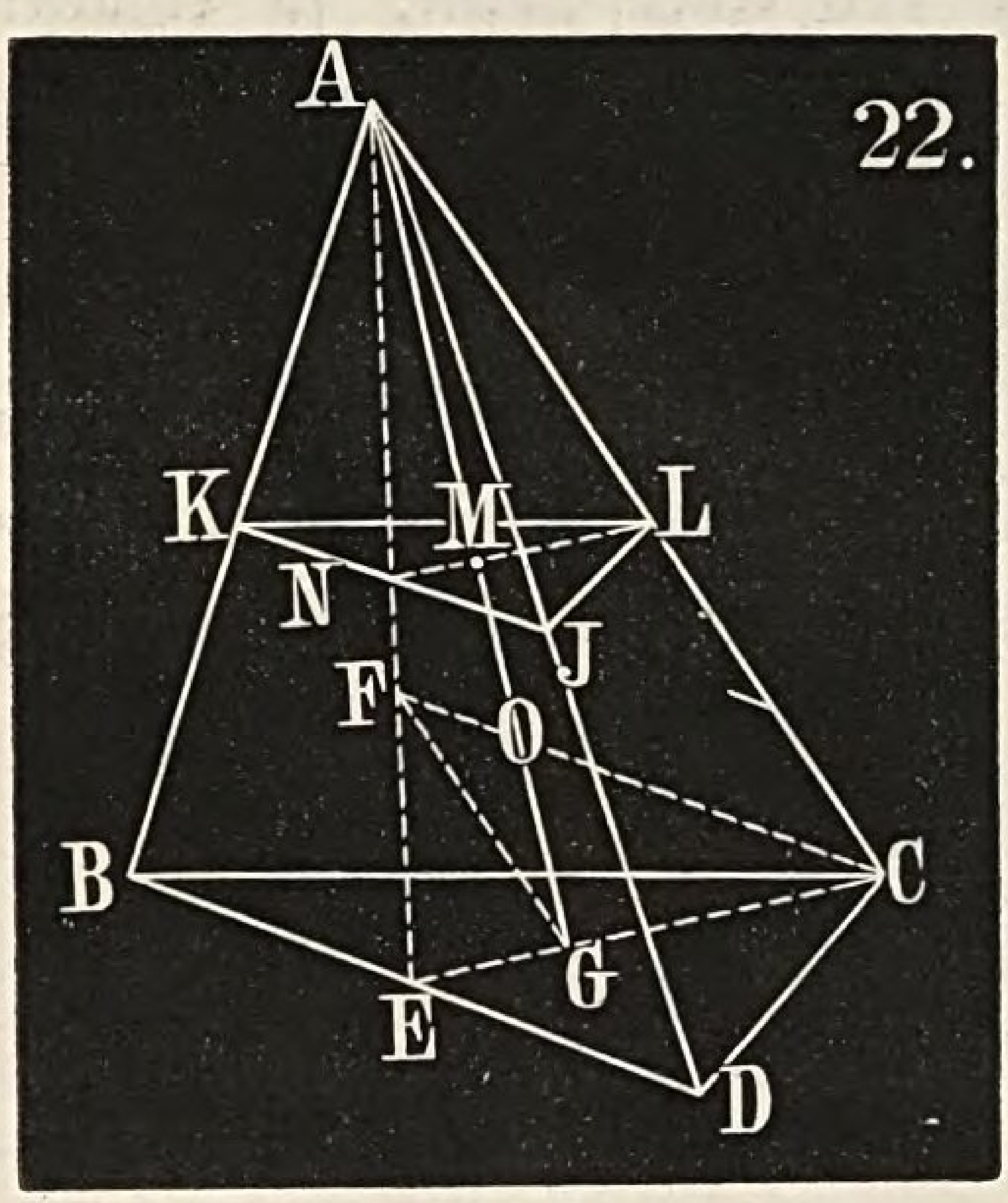
§ 82. **Lehrsatz.** Der Schwerpunkt der Schale einer Kugelzone oder Kugelhaube liegt in der Mitte der durch den Mittelpunkt gehenden Höhe.

Beweis. Teilen wir die Zone in n Schichten von gleicher Höhe, so entstehen n Ringe von gleichem Flächeninhalt, deren Schwerpunkte auf der Höhe der Zone liegen. Denken wir uns die Masse dieser Ringe in ihren Schwerpunkten verdichtet, so entsteht eine Gerade von der Ausdehnung der Höhe, welche ihren Schwerpunkt in der Mitte hat.

§ 83. **Schwerpunkt einer dreiseitigen Pyramide. Lehrsatz.** Der Schwerpunkt O einer dreiseitigen Pyramide liegt auf einer Geraden AG, welche die Spitze mit dem Schwerpunkt G der Basis verbindet, in einer Entfernung von der Spitze

$$AO = \tfrac{3}{4} AG.$$

Beweis. Sei (Fig. 22) G der Schwerpunkt der Basis und F der des Dreieckes ABD. Legen wir eine Ebene KLJ $\parallel$ zur Basis und ziehen LN, so ist $\triangle$ KLJ $\backsim$ $\triangle$ BCD und hat seinen Schwerpunkt M auf der Geraden AG. Denn erstlich ist KN = JN wegen BE = ED, ferner ist aus der Aehnlichkeit der Dreiecke LM : LN = CG : CE; mithin LM = $\tfrac{2}{3}$ LN und M der Schwerpunkt des Dreieckes JKL. Aus demselben Grunde hat jeder andere parallele Schnitt seinen Schwerpunkt auf AG. Ziehen wir CF, so liegt der Schwerpunkt der Pyramide aus demselben Grunde auch auf CF, beide Gerade liegen in der Ebene AEC und zwar im Innern des $\triangle$ AEC und müssen sich notwendig schneiden; folglich ist der Schnittpunkt O der Schwerpunkt der Pyramide. Ziehen wir noch FG, so ist FG $\parallel$ AC und wir haben



22.

$$\begin{aligned} AO : GO &= AC : FG \\ AC : FG &= CE : GE \\ CE : GE &= 3 : 1; \text{ mithin} \\ \hline AO : GO &= 3 : 1, \text{ oder} \\ AO : AG &= 3 : 4, \text{ oder} \\ AO &= \tfrac{3}{4} AG. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Vorstehender Lehrsatz gilt wörtlich für eine n-seitige Pyramide wenn G der Schwerpunkt der Basis ist. Denn zerlegt man die n seitige Pyramide in dreiseitige, so hat jede dieser

Pyramiden ihren Schwerpunkt in einer Ebene, welche durch O ∦ zur Basis gelegt wird unter Voraussetzung, daß AO $= \frac{3}{4}$ AG ist. Die Schnittfigur hat aber ihren Schwerpunkt auf AG aus demselben Grunde, als das △ JKL seinen Schwerpunkt M auf AG hat; mithin ist O Schwerpunkt für die ganze Pyramide.

Zusatz 2. Sind y_1, y_2, y_3, y_4 die Entfernungen der vier Ecken einer dreiseitigen Pyramide von einer Ebene, so erhalten wir für die Entfernung y des Schwerpunktes O von derselben Ebene analog § 74, Zus. 3

$$y = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

§ 84. Zusatz. Sind M und G (Fig. 22) die Schwerpunkte der parallelen Flächen einer abgekürzten dreiseitigen Pyramide, so liegt ihr Schwerpunkt auf MG in einer Entfernung von der Basis G

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{G + 2\sqrt{Gg} + 3g}{G + \sqrt{Gg} + g},$$

wenn h die Höhe, G und g den Inhalt der Grundflächen bezeichnen.

Denn zerlegen wir den Körper in die drei bekannten Pyramiden $\frac{1}{3}$ Gh, $\frac{1}{3}$ gh, $\frac{1}{3}$ h $\sqrt{Gg}$ und nehmen wir ihre Momente in Beziehung auf die Ebene der Basis G, so ist nach § 49 die Summe ihrer Momente gleich dem Moment des Pyramidenstumpfes. Ist γ das Gewicht der Volumeinheit, so haben wir die Gleichung

$$x \cdot \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{Gg})\gamma = \frac{h}{4} \cdot \frac{Gh}{3}\gamma + \frac{3h}{4} \cdot \frac{gh}{3}\gamma + \frac{2h}{4} \cdot \frac{h}{3}\sqrt{Gg} \cdot \gamma,$$

woraus sich sofort der für x aufgestellte Wert ergibt. Die Momente der ersten zwei Pyramiden ergeben sich nach Lehrsatz § 83; dagegen bedarf das dritte Moment noch einer Erörterung. Verlegen wir die Spitze der dritten Pyramide von der Ebene g in die Ebene G, so läßt sie sich als eine Pyramide von der Höhe = h und Basis = $\sqrt{Gg}$ betrachten, deren Schwerpunkt von G eine Entfernung $= \frac{1}{4}$ h hat; bringen wir die Spitze in die ursprüngliche Lage zurück, so beschreiben Spitze und Schwerpunkt parallele Strecken, die sich verhalten wie 4 : 1. Da sich

nun die Spitze um h von G entfernt, so entfernt sich der Schwerpunkt nur um $\frac{1}{4}$ h; folglich beträgt die ganze Entfernung

$$\tfrac{1}{4}h + \tfrac{1}{4}h = \tfrac{2}{4}h \text{ von der Basis } G.$$

§ 85. Zusatz. Der Schwerpunkt eines Kegels liegt auf seiner Achse in einer Entfernung von der Spitze $AO = \frac{3}{4}h$. Der Schwerpunkt eines Kegelstumpfes liegt gleichfalls auf der Achse in einer Entfernung vom Kreise R

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

§ 86. Zusatz. Der Schwerpunkt eines Prisma liegt in der Mitte der Schwerlinie d. h. der Geraden, welche die Schwerpunkte der beiden Grundflächen verbindet.

§ 87. **Schwerpunkt eines Kugelsektors.** Denken wir uns den Sektor in n unter sich gleiche Kegel zerlegt, so hat jeder derselben seinen Schwerpunkt auf seiner Achse $\frac{3}{4}$ r vom Centrum entfernt. Denken wir uns die Massen dieser Kegel in ihren Schwerpunkten vereinigt, so entstehen n gleiche Massenpunkte, welche sämmtlich auf einer Kugelhaube von Radius $= \frac{3}{4}r$ liegen und nach § 82 ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt in der Mitte der Höhe haben. Ist h die Höhe der zum Sektor gehörigen Haube, so ist $\frac{3}{4}$ h die entsprechende Höhe der Schwerpunktenhaube. Der Schwerpunkt des Sektors hat demnach eine Entfernung vom Mittelpunkt

$$x = \tfrac{3}{4}r - \tfrac{3}{8}h = \tfrac{3}{8}(2r - h).$$

§ 88. Zusatz. Für eine Halbkugel ist $h = r$; mithin

$$x = \tfrac{3}{4}r.$$

§ 89. Zerlegen wir den Sektor in ein Segment, dessen Höhe $= h$, und in einen Kegel, dessen Höhe $= r - h$ ist, so haben wir zwischen ihren Momenten in Beziehung auf den Mittelpunkt der Kugel

$$\tfrac{3}{8}(2r - h) \cdot \text{Sector} \cdot \gamma = \tfrac{3}{4}(r - h)\,\text{Keg} \cdot \gamma + x \cdot \text{Segm} \cdot \gamma.$$

Nun ist aber

$$\text{Sect} \cdot = \tfrac{2}{3} r^2 \pi h;\ \text{Keg} \cdot = \frac{r\text{-}h}{3}(2rh\text{-}h^2)\pi;\ \text{Segm} = \tfrac{1}{3}h^2\pi(3r\text{-}h).$$

Vermöge dieser Werte erhalten wir nach geschehener Reduktion für die Entfernung des Schwerpunktes des Segments vom Mittelpunkt

$$x = \frac{3}{4} \frac{(2r-h)^2}{3r-h}.$$

§ 90. **Gleichgewichtszustand starrer Körper.** Denken wir uns durch den Schwerpunkt C eines starren Körpers eine Gerade AB gelegt und diese in A und B auf zwei festen Unterlagen horizontal ruhend, so daß nur eine um AB drehende Bewegung möglich ist, so bleibt der Körper in jeder Lage in Ruhe, wenn er sich selbst überlassen wird, weil wir uns die Masse des Körpers in C vereinigt denken dürfen, deren Moment in Beziehung auf AB Null ist. Legen wir aber die Gerade AB in einer Entfernung CD = a vom Schwerpunkt C durch den Körper, so hat derselbe, wenn P sein Gewicht ist, ein Moment = aP, welches nur dann keine Bewegung hervorbringt, wenn CD mit der durch C gelegten Vertikalen zusammenfällt, weil nur so die zwei wirkenden Kräfte, Schwerkraft und Widerstand, in eine Gerade zusammenfallen (§ 9). Läge nun D oberhalb C, so würde der Körper aus seiner Ruhelage gebracht, diese Lage immer wieder einzunehmen streben und schließlich auch behalten, wie die Erfahrung lehrt; läge dagegen D unterhalb C, so würde die geringste Kraft hinreichen, ihn aus dem Gleichgewichte zu bringen und in eine drehende Bewegung versetzen, der Körper würde umschlagen und erst nach einer Reihe von Schwankungen in seiner jetzigen Lage zur Ruhe kommen.

Dieses dreifache Verhalten der Körper hinsichtlich ihres Gleichgewichtszustandes nennt man den Zustand des indifferenten, stabilen und labilen Gleichgewichts. Wird überhaupt ein freier Körper von zwei gleichen und entgegengesetzten Kräften in A und B angegriffen, welche sich nach § 9 Gleichgewicht halten, so heißt auch hier der Zustand des Gleichgewichts stabil oder labil, je nachdem die Kräfte als Zug oder Druck wirken.

Sechstes Kapitel.

Gleichgewicht an Maschinen.

§ 91. **Erklärung.** Maschine ist im Allgemeinen jede Vorrichtung, welche die Wirkung einer Kraft in bestimmter Absicht vermittelt oder fortpflanzt. Beispiele von Maschinen der einfachsten Art (auch mechanische Potenzen genannt) sind der Hebel (Wage), das Wellrad, der Haspel, die Rolle, die schiefe Ebene, der Keil, die Schraube und andere. Leichte, kleine, nur zum Handgebrauch bestimmte Maschinen heißen wir Werkzeuge.

§ 92. **Der Hebel.** Jeder unbiegsame, gerade oder krumme Stab oder stabförmige Körper, der in einem Punkte unterstützt und in seinen Endpunkten von Kräften angegriffen wird, so daß er nur eine drehende Bewegung machen kann, heißt Hebel. Da der Unterstützungspunkt Widerstand* leistet, so wirken an jedem Hebel wenigstens drei Kräfte, deren Gleichgewichtsbedingungen sich nach dem Prinzipe der statischen Momente § 34 oder 40 aufstellen lassen. Weil aber kein Hebel gewichtslos ist, wie dort vorausgesetzt wurde, so kommt sein Gewicht als neue Kraft hinzu, und man nennt ihn einen physischen Hebel zum Unterschiede vom gewichtslosen, welcher mathematischer Hebel heißt. Es läßt sich aber jeder physische Hebel auf einen mathematischen reduzieren. Denn ist AB ein gleichförmiger homogener Stab vom Gewichte $= p$, C Unterstützungspunkt, O Schwerpunkt, so ist $OA = OB$ und $OC = \frac{1}{2}(AC - BC)$, folglich in Beziehung auf C

$$AC \cdot P = BC \cdot Q - OC \cdot p, \text{ oder auch}$$

$$(1) \quad a \cdot P = b \cdot Q - \tfrac{1}{2}(a - b)p$$

als Bedingung des Gleichgewichts, wenn $AC = a$ und $BC = b$ gesetzt wird.

Da nun für ein und denselben Hebel die Größe $\frac{1}{2}(a - b)p$ konstant ist, so läßt sich die Reduktion praktisch sehr leicht dadurch ausführen, daß man an dem kürzeren Theil ein Gewicht q anhängt, dessen Moment der konstanten Größe gleich ist, was

* Bei jeder Maschine erscheint der Widerstand nicht als aktive, sondern als passive oder reagierende Kraft.

versuchsweise jedesmal ausgeführt werden kann, ohne die Lage des Schwerpunktes von AB zu kennen.

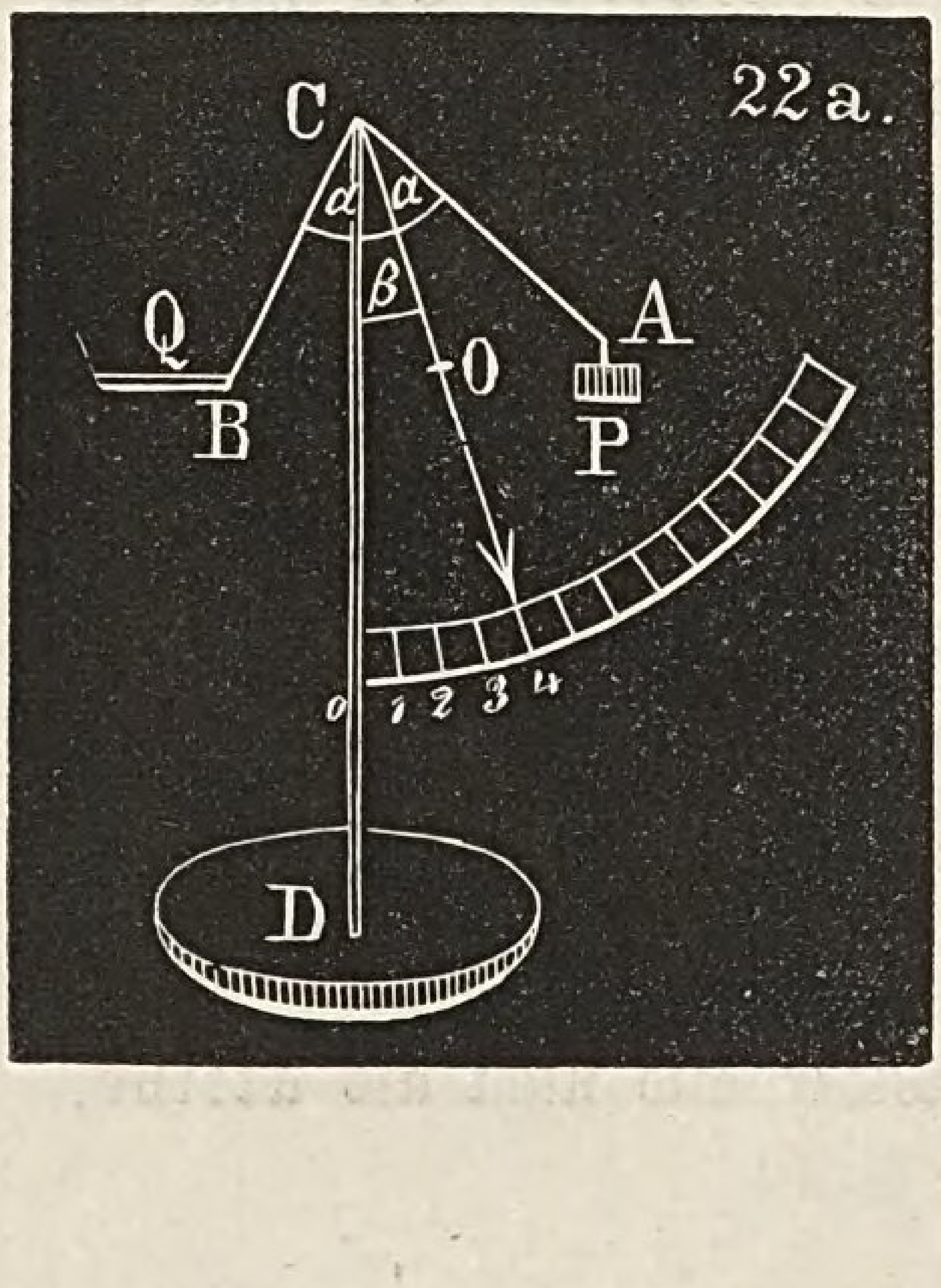
Die Strecken AC und BC nennt man Hebelarme, den Hebel selbst zweiarmig; dagegen heißt er einarmig, wenn der Unterstützungspunkt in einem der Endpunkte sich befindet. Bilden die beiden Arme einen unveränderlichen Winkel, so heißt er Winkelhebel. Ist der Winkelhebel um einen festen Punkt oder Achse in C drehbar und sind α, β die Winkel, welche die Kräfte P und Q mit den Armen AC und BC machen, so können wir wie in § 35 jede Kraft in rechtwinkelige Komponenten zerlegen. Die Komponenten $P \cos \alpha$ und $Q \cos \beta$ werden durch den Widerstand der festen Achse und Arme aufgehoben, während die andern zwei sich Gleichgewicht halten, wenn die Bedingungsgleichung erfüllt ist

$$(2) \quad AC \cdot P \sin \alpha = BC \cdot Q \sin \beta.$$

Das Nämliche gilt von einem geraden Hebel.

§ 93. **Die Wage,** eines der wichtigsten Instrumente im Dienste der Wissenschaft und des alltäglichen Lebens, ist im Wesentlichen ein zweiarmiger physischer Hebel. Von den verschiedenen Arten sollen folgende vier näher betrachtet werden.

1) **Die Schnellwage.** Dieselbe ist ein Hebel mit zwei Armen von ungleicher Länge. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher $AC \cdot P = BC \cdot Q$. Das Gewicht (der Läufer genannt) ist gewöhnlich verschiebbar, während der Arm, an welchem die zu wiegende Last angebracht wird, unveränderlich ist.



2) **Die Zeigerwage.** Dieselbe ist (Fig. 22a) im Wesentlichen ein Winkelhebel, der um den festen Punkt C beweglich ist, an dem einen Arm in A ein konstantes Gewicht P, und an dem anderen in B einen Teller zum Auflegen des zu wiegenden Gegenstandes trägt. Außerdem ist in C ein Zeiger CO befestigt,

der sich zugleich mit dem Hebel bewegt und im Zustande der Ruhe das Gewicht des Gegenstandes Q auf einem mit einer Skala versehenen Kreisring, der am Gestelle befestigt ist und seinen Mittelpunkt im C hat, anzeigt. Ist die Wage ohne Belastung, so steht der Zeiger auf Null; bleibt der Zeiger bei einer Belastung Q auf dem mit 4 bezeichneten Striche stehen, so wiegt der Gegenstand vier Gewichtseinheiten. Die Skala des Ringes kann leicht empirisch hergestellt werden.

Sind nun BCO = ACO = α der unveränderliche und β der veränderliche Winkel, welche der Zeiger beziehungsweise mit dem Arm AC oder BC und der Vertikalen CD macht, so haben wir nach § 92 (2) als Bedingung des Gleichgewichts

$$AC \cdot P \sin(\alpha + \beta) = BC \cdot Q \sin(\alpha - \beta), \text{ oder}$$

$$aP \sin(\alpha + \beta) = bQ \sin(\alpha - \beta).$$

Für ein gegebenes Gewicht Q erhalten wir hieraus

$$\tan \beta = \frac{bQ - aP}{bQ + aP} \tan \alpha.$$

Diese Wage eignet sich nur für Gegenstände von geringem Gewicht, wie für Briefe; sie ist bequem, aber wenig empfindlich.

3) **Die gemeine Wage,** die wichtigste von allen, ist ein fester Stab (Wagbalken genannt), der in seinen Endpunkten A und B zum Auflegen von Gewicht und Last zwei Schalen oder Schüsseln trägt und in seinem Stützpunkt C in der Mitte von AB drehbar ist. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher P = Q. Die Brauchbarkeit dieser Wage bedingt, daß der Gleichgewichtszustand (§ 90) ein stabiler sei. Fiele C mit dem Schwerpunkt O des Wagbalkens zusammen, so bestände bei jeder Lage von AB Gleichgewicht (§ 28) und es müßte sich AB bei der geringsten ungleichen Belastung vertikal stellen; noch weniger zulässig ist der Zustand des labilen Gleichgewichts. Es wird daher bei jeder Wage dieser Art gefordert, daß O unterhalb C liege und CO $\perp$ AB sei. Ist diese Bedingung erfüllt, so stellt sich AB stets horizontal, wenn P = Q, und es ist umgekehrt P = Q, wenn AB sich horizontal stellt. Dies wird durch einen Zeiger (Zunge) angezeigt, welcher in der Mitte von AB und

senkrecht auf AB angebracht ist. Soll aber die Wage auch gut sein, so muß sie noch besonderen Bedingungen genügen.

Vor allem müssen die Punkte A, B, C scharf begrenzt und die Arme AC und BC in Beziehung auf C symmetrisch konstruiert sein; außerdem beruht die Güte einer Wage auf ihrer Empfindlichkeit, d. h. auf der Größe ihres Ausschlagwinkels β, den der Zeiger bei einer möglichst kleinen ungleichen Belastung $q = Q - P$ des Wagbalkens mit der Vertikalen macht. Setzen wir $AC = BC = b$, $CO = a$, das Gewicht des Wagbalkens $= p$ und berücksichtigen, daß AB bei einer schiefen Stellung des Wagbalkens mit der Horizontalen denselben Winkel β macht, wie CO mit der Vertikalen, so haben wir als Bedingung des Gleichgewichts analog § 92

$$AC \cdot Q \cos\beta = BC \cdot P \cos\beta + BO \cdot p \sin\beta, \text{ oder}$$

$$b(P + q) = bP + ap \tang\beta; \text{ mithin}$$

$$(1) \quad \tang\beta = \frac{bq}{ap}.$$

Da der Wert eines Bruches um so größer ist, je größer der Zähler und je kleiner der Nenner wird, so ist für eine empfindliche Wage erforderlich, daß der Wagbalken wo möglich lang, aber von geringem Gewichte sei, und daß die Punkte C und O so nahe als möglich zusammenrücken. Damit aber diese Vorteile nicht wieder verloren gehen, ist endlich noch erforderlich, daß die Punkte A, B, C in einer Geraden liegen. Nehmen wir, um dies einzusehen, $\angle ABC < 180^0$ an, sei es in Folge von Biegungen oder mangelhafter Konstruktion, und $\angle ACO = BCO = \alpha$, so haben wir eine Zeigerwage (Fig. 22a) mit gleich langen Armen $AC = BC = b$, an welcher jedoch noch eine dritte Kraft p in O wirkt. Die Gleichgewichtsbedingung für diesen Fall ist

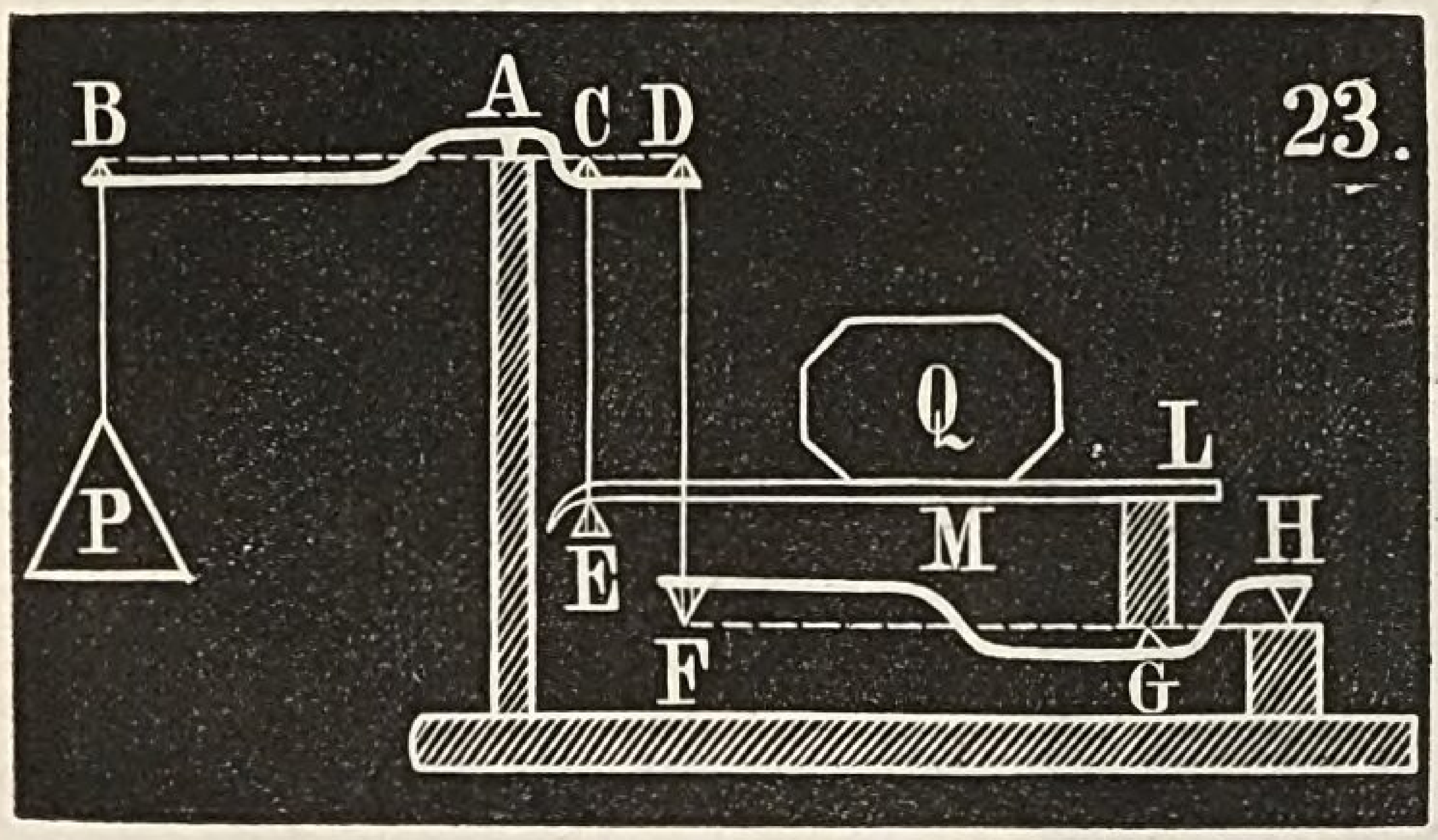
$$BC \cdot Q \sin(\alpha - \beta) = AC \cdot P \sin(\alpha + \beta) + CO \cdot p \sin\beta, \text{ oder}$$

$$b(P + q)\sin(\alpha - \beta) = bP\sin(\alpha + \beta) + ap\sin\beta; \text{ hieraus}$$

$$(2) \quad \tang\beta = \frac{bq\sin\alpha}{ap + b(2P + q)\cos\alpha}.$$

Demnach wird β um so kleiner, je größer b (2P + q) ist; dieser Einfluß verschwindet, wenn $\alpha = 90$, also ACB eine Gerade ist. Setzen wir daher den Wagbalken wo möglich lang, leicht, unbiegsam und symmetrisch voraus, so sind die Erfordernisse zu einer guten, empfindlichen Wage, 1) daß die Punkte A, B, C in einer Geraden liegen und 2) daß der Schwerpunkt O so nahe als möglich an C rücke, ohne selbst mit ihm zusammen zu fallen.

4) **Die Straßburger oder Brückenwage** von Quintenz. Dieselbe ist eine Zusammensetzung aus drei Hebeln BD, EL, FH (Fig. 23). Der Wagbalken BD balanziert auf einer Schneide in A, trägt in B das Gewicht P und auf 2 Schneiden in C und D mittelst der Stäbe CE, DF die Last Q, welche auf der Brücke EL ruht und vermöge LG auf den Hebel FH einen Druck ausübt. Der Hebel EL hat seinen Stützpunkt in L und der Hebel FH in H. Außerdem ist die Einrichtung getroffen, daß die Bedingung



$$AC : CD = GH : FG, \text{ oder } AC : AD = GH : FH$$

erfüllt sein muß. Unter dieser Voraussetzung ist die Bedingung des Gleichgewichts

$$AB \cdot P = AC \cdot Q.$$

Denn bezeichnen wir mit x, y, z die in C, D, L, oder was dasselbe ist, in E, F und G wirkenden, von der Last Q ausgehenden Kräfte und denken wir uns den Angriffspunkt der Last Q in M, so haben wir als Gleichgewichtsbedingungen beziehungsweise

$$(1)\quad AB \cdot P = AC \cdot x + AD \cdot y;$$

$$(2)\quad EL \cdot x = LM \cdot Q; \qquad (3)\quad FH \cdot y = GH \cdot z.$$

Durch Elimination von x und y wird aus Gl. (1)

$$AB \cdot P = AC \cdot Q \cdot \frac{LM}{LE} + AD \cdot z \cdot \frac{GH}{FH}, \text{ oder}$$

wegen $GH : FH = AC : AD$ nach der Voraussetzung

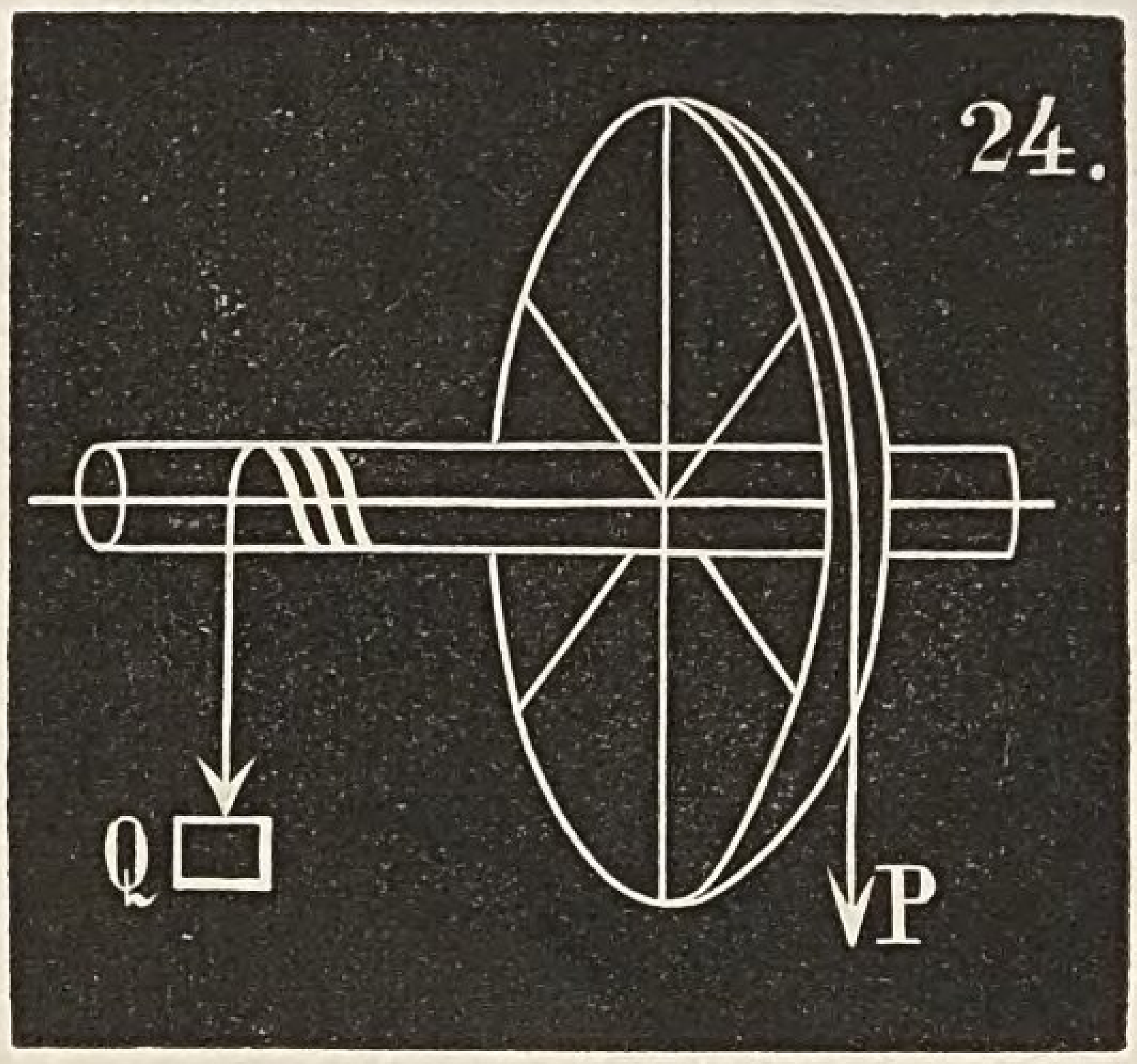
$$AB \cdot P = AC\left(\frac{LM}{LE} \cdot Q + z\right).$$

Um nun z zu eliminieren, kann man sich E fest denken, dann ist $LE \cdot z = EM \cdot Q$. Mit Hilfe dieser Gleichung wird

$$AB \cdot P = AC \cdot Q.$$

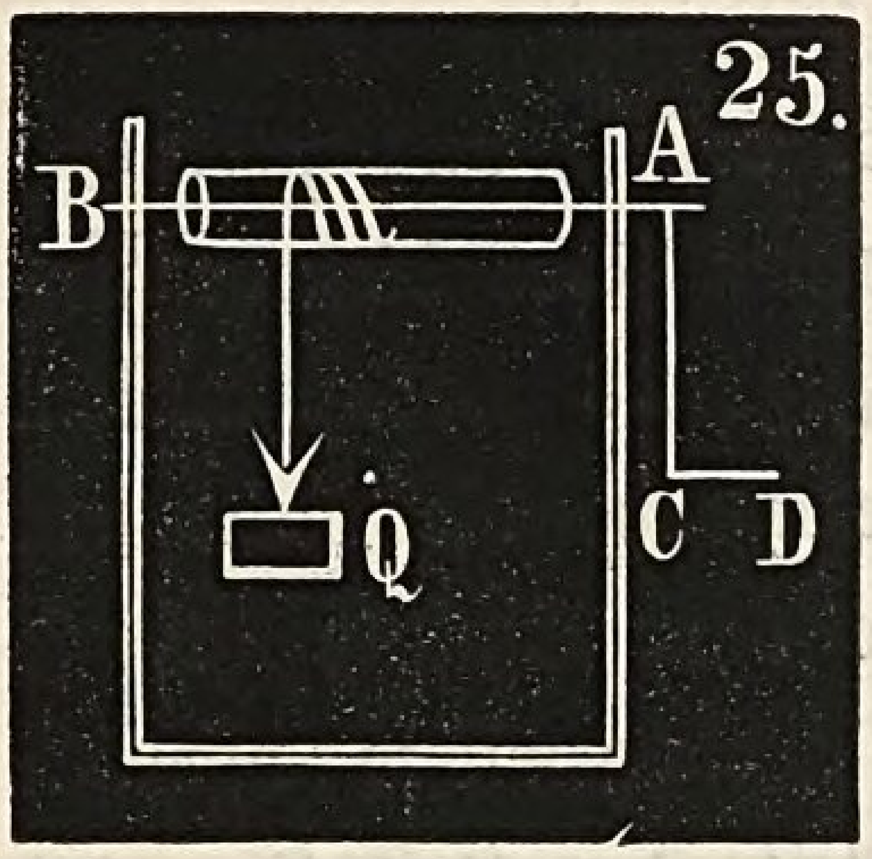
Die Lage von Q ist also völlig gleichgiltig, was ein großer praktischer Vorteil ist; überdies ist in der Regel $AC = \frac{1}{10}$ AB. In diesem Falle heißt die Wage Dezimalwage, und es hält 1 Kilogramm Gewicht einer Last von 10 Kilogramm Gleichgewicht.

§ 94. **Das Wellrad.** (Fig. 24.) An einem um seine Achse drehbaren Cylinder (der Welle) ist eine kreisrunde Scheibe oder Rad so befestigt, daß der Mittelpunkt in die Achse der Welle fällt. Um beide Teile, Welle und Rad, winden sich in entgegengesetzter Richtung zwei Seile, an deren Enden zwei parallele Kräfte P und Q wirken. Die Angriffspunkte der Kräfte liegen in der Peripherie von Welle und Rad, der Stütz- oder Drehpunkt in der Achse. Die Bedingung des Gleichgewichts besteht hier in der Gleichheit der Momente an Welle und Rad



$$r \cdot Q = R \cdot P,$$

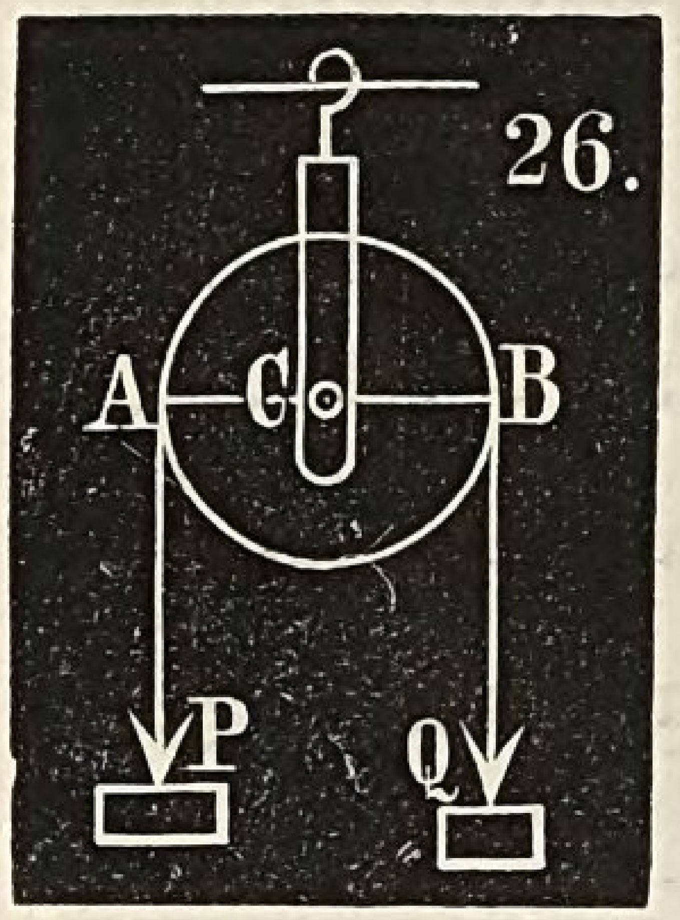
was wir entweder nach § 49 oder noch passender mit Hilfe zweier Kräftepaare nach § 61 erklären, indem wir in der Achse noch zwei antiparallele Kräfte P und Q anbringen, wodurch wir einerseits zwei Kräftepaare von entgegengesetzter Wirkung erhalten, und andrerseits bemerken, daß die eingeführten Kräfte durch den Widerstand der Achse aufgehoben werden.

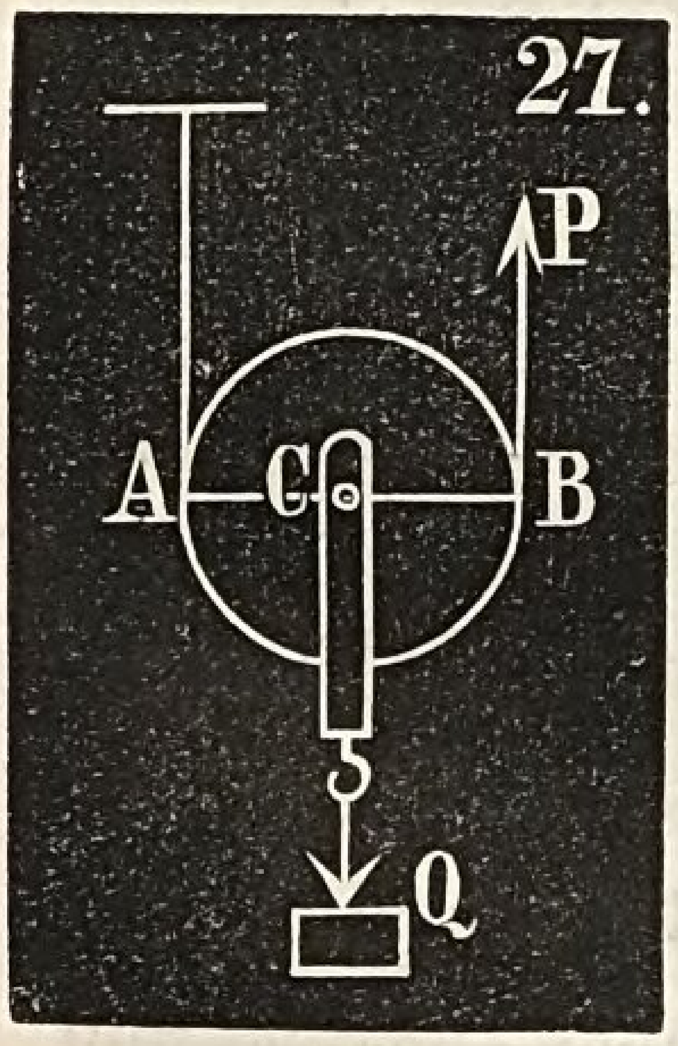


§ 95. **Der Haspel.** Tritt im vorhergehenden Falle an die Stelle des Rades eine Speiche AC (Fig. 25) mit einem Griffe CD, so heißt die Vorrichtung Haspel, AC Triebstock, gekrümmt Kurbel. Die Gleichgewichtsbedingnng bleibt dieselbe, nämlich

$$r \cdot Q = AC \cdot P.$$

§ 96. **Die Rolle.** Dieselbe ist eine kreisrunde, um eine Achse bewegliche Scheibe mit einem hohlen Rande zur Aufnahme eines Seiles, an dessen Endeu zwei Kräfte P und Q wirken. Die Rolle ist entweder fest (Fig. 26), oder beweglich (Fig. 27). In beiden Fällen haben wir die Wirkungsweise eines Hebels. Bei der festen Rolle sind, so lange AP ╫ BQ, die Angriffspunkte in den Endpunkten des Durchmessers AB, der Stützpunkt in C der Mitte von AB; daher die Bedingung des Gleichgewichts





$$(1)\quad AC \cdot P = BC \cdot Q, \text{ oder } P = Q.$$

Bei der beweglichen Rolle sind die Angriffspunkte in B und C, der Stützpunkt in A; daher die Bedingung des Gleichgewichts $AB \cdot P = AC \cdot Q$, oder wegen $AB = 2\,AC$

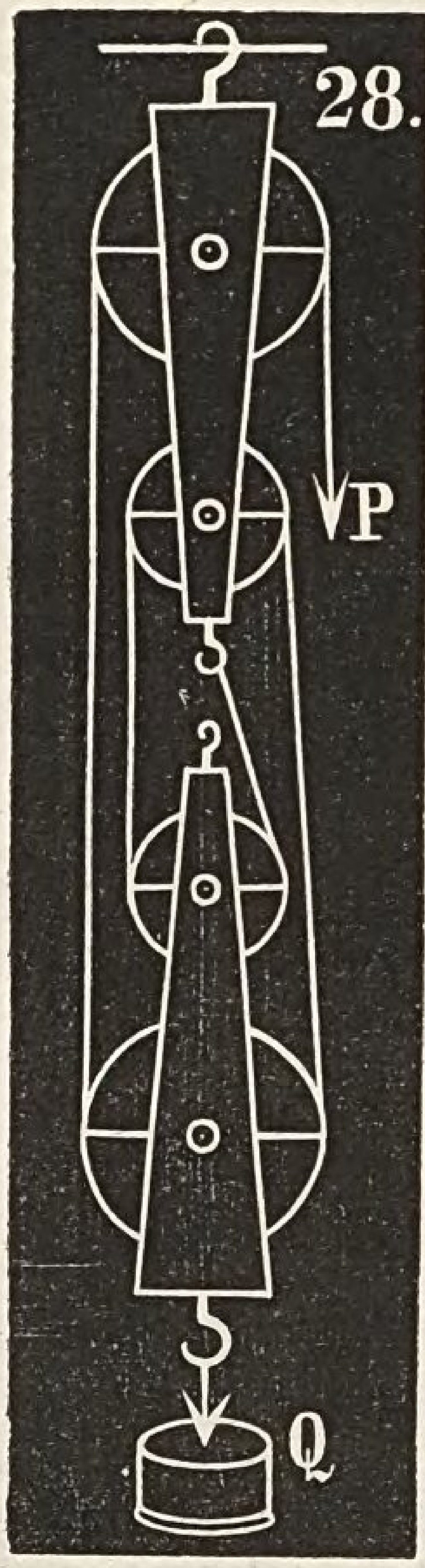
$$(2)\quad 2P = Q.$$

Machen aber AP und BQ einen Winkel α mit einander, so ist bei der festen Rolle immer noch $P = Q$, während bei der beweglichen $P \cos \frac{1}{2}\alpha$ an die Stelle von P in (2) tritt (vergl. Formel 6 § 19); mithin ist in diesem Falle

$$(3)\quad 2P \cos \tfrac{1}{2}\alpha = Q.$$

Bei der beweglichen Rolle ändert sich also die Kraft P zugleich mit dem Richtungswinkel α, während bei der unbeweglichen P unverändert bleibt; aus diesem Grunde heißt erstere auch Kraftrolle und letztere Leitrolle.

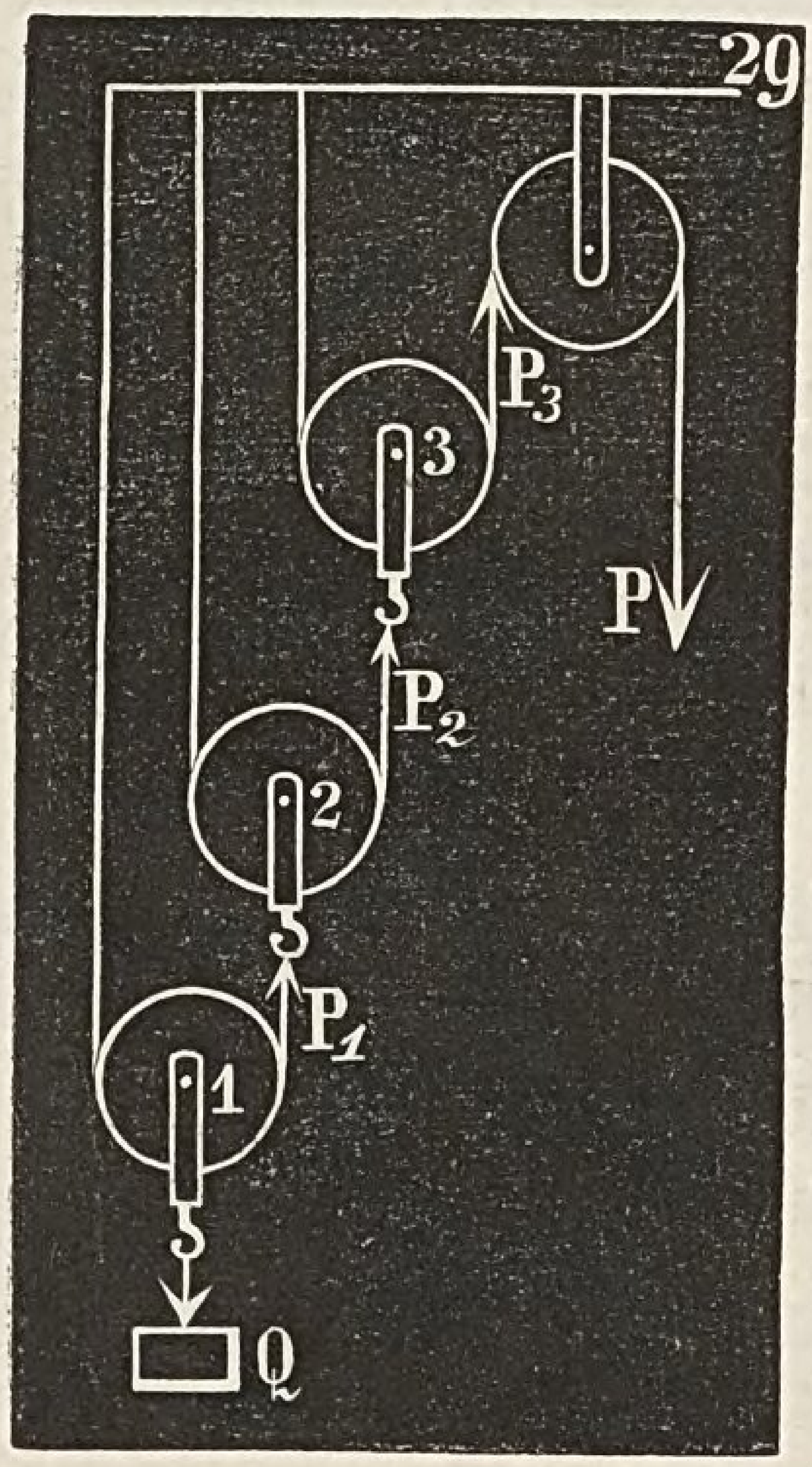
§ 97. **Der Flaschenzug.** Derselbe besteht aus zwei Gehäusen (Flaschen), von denen jedes dieselbe Anzahl Rollen trägt, wie Fig. 28 veranschaulicht. Die untere Flasche ist beweglich, die obere fest. Da die Größe der Rolle ohne Einfluß ist, so trägt im Zustande des Gleichgewichts offenbar jede Rolle denselben Anteil der Last Q, oder was dasselbe ist, die Spannung des Seiles ist überall dieselbe. Ist nun n die Anzahl der Rollen in der unteren Flasche, so trägt jede Rolle den n^{ten} Teil der Last. An der untersten Rolle wirken demnach in den Punkten A und C des Durchmessers AB zwei parallele Kräfte P und $\frac{1}{n}Q$, welche im Gleichgewicht sind, sobald analog Fig. 27 die Bedingung



$$AB \cdot P = AC \cdot \frac{1}{n} Q, \text{ oder auch}$$

$$P = \frac{1}{2n} Q \text{ wegen } AB = 2\,AC$$

erfüllt ist. Unter dieser Bedingung ist die unterste Rolle, also auch der ganze Zug im Gleichgewicht.



§ 98. **Der Potenzflaschenzug.** Derselbe ist eine Zusammensetzung aus beweglichen Rollen mit einer festen, wie Fig. 29 veranschaulicht. Sind nun n + 1 Rollen gegeben, so ist die feste Rolle ohne jeden Einfluß auf das Gleichgewicht und braucht deßhalb nicht mitbetrachtet zu werden. Außerdem dürfen wir den Radius r einer jeden der n beweglichen Rollen gleich voraussetzen. Soll nun die Kraft P der Kraft oder Last Q Gleichgewicht halten, und bezeichnen wir mit P_1, P_2, P_3 . . . die an den auf einander folgenden

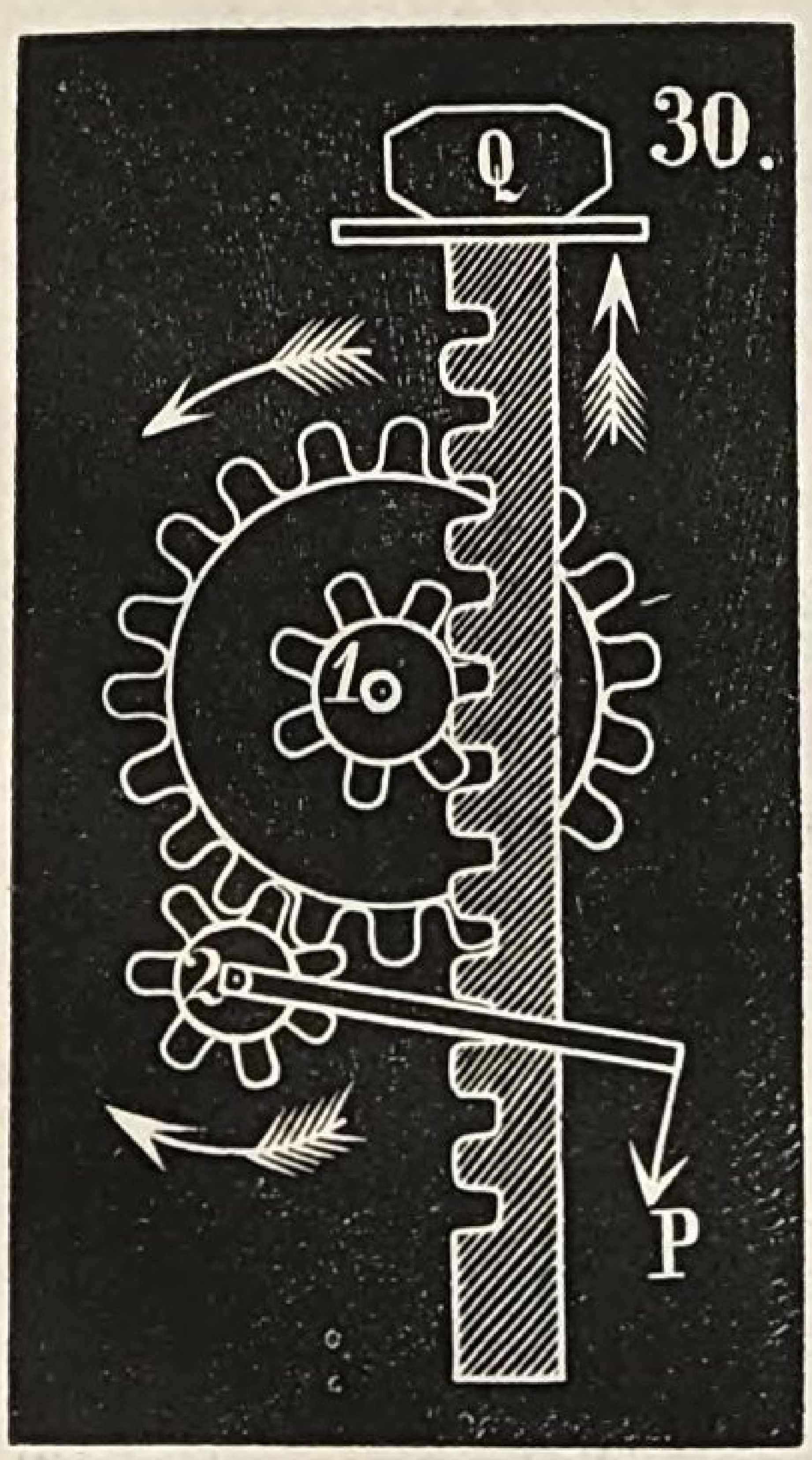
Rollen angreifenden Kräfte, welche von Q herrühren, so haben wir nach § 96

$$\begin{array}{lll} Q & = 2P_1 & \text{an der Rolle (1)} \\ P_1 & = 2P_2 & \text{,, ,, ,, (2)} \\ P_2 & = 2P_3 & \text{,, ,, ,, (3)} \\ \vdots & \vdots & \\ P_{n-1} & = 2P_n & \text{,, ,, ,, (n)} \\ \hline Q & = 2^nP & \end{array}$$

als Bedingung des Gleichgewichts für n bewegliche Rollen.

Anm. Selbstverständlich muß auch noch das Gewicht jeder Rolle in Rechnung gebracht werden.

§ 99. **Die Winde.** Dieselbe besteht aus einer gezahnten eisernen Stange, welche die Last Q angreift, und einem Räderwerk, welches die an einer Kurbel (Fig. 30) wirkende Kraft P vermittelt. Die gezahnte Stange greift in die gezahnte Welle (1), an welcher ein gezahntes Rad befestigt ist. Dieses letztere greift in die gezahnte Welle (2), mit welcher eine Kurbel verbunden ist. Das Ganze ist demnach eine Zusammensetzung aus zwei Hebeln, welche ihren Stützpunkt in der Achse der beiden Wellen haben. Bezeichnen wir den Radius des Rades mit R, die Radien der Wellen mit r und r_1, die Länge des Hebelarmes mit a und die Kraft, welche an der Welle (2) der Kraft P das Gleichgewicht hält mit P_1, so haben wir

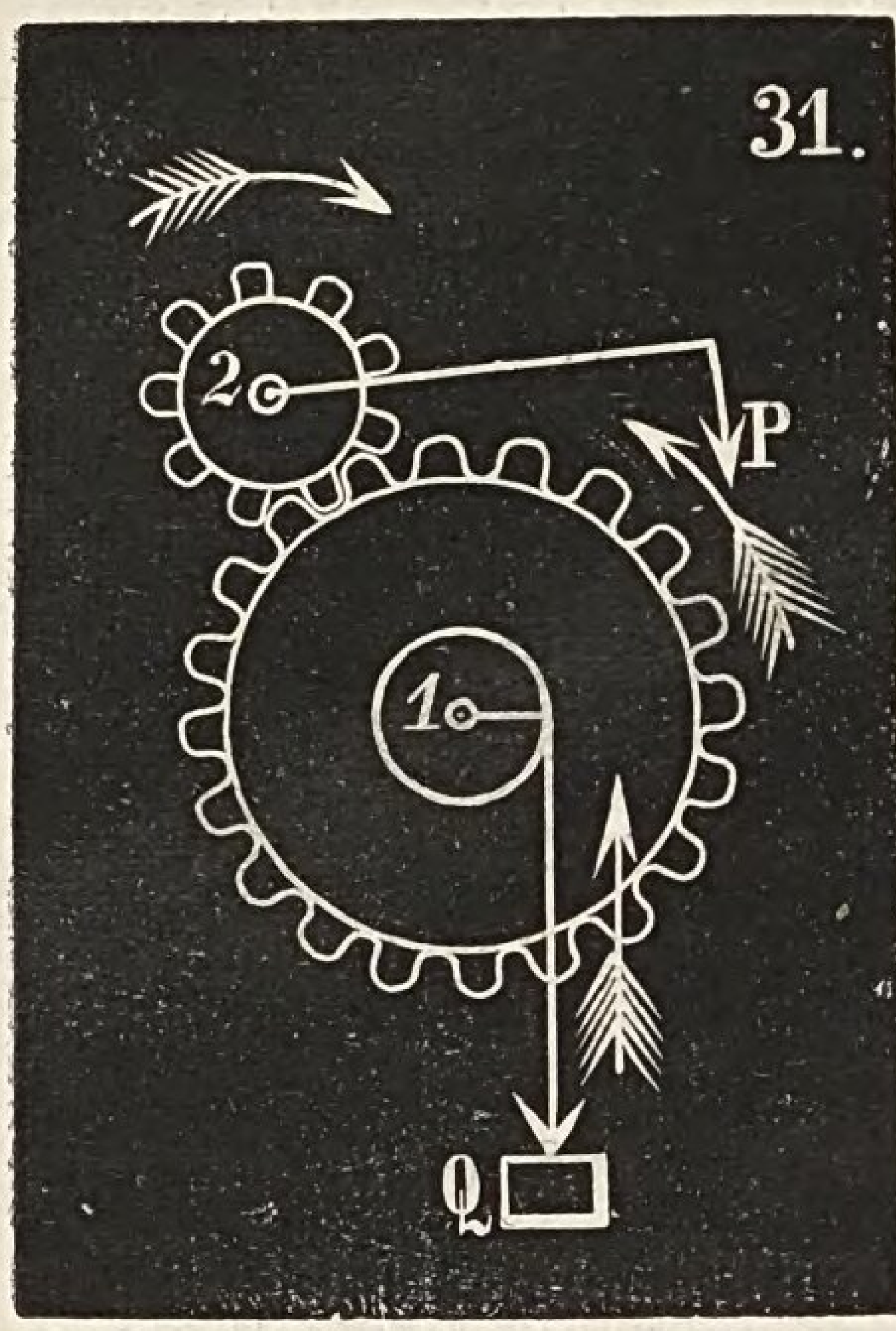


$$\begin{array}{lll} aP & = r_1 \cdot P_1 & \text{an der Welle (2)} \\ RP_1 & = r \cdot Q & \text{,, ,, ,, (1)} \\ \hline \end{array}$$

$$\text{mithin } a \cdot R \cdot P = r \cdot r_1 \cdot Q$$

als Bedingung des Gleichgewichts.

§ 100. **Der Bauaufzug.** Derselbe ist der Winde ganz ähnlich, wie Fig. 31 veranschaulicht. Ein Seil, an dessen einem



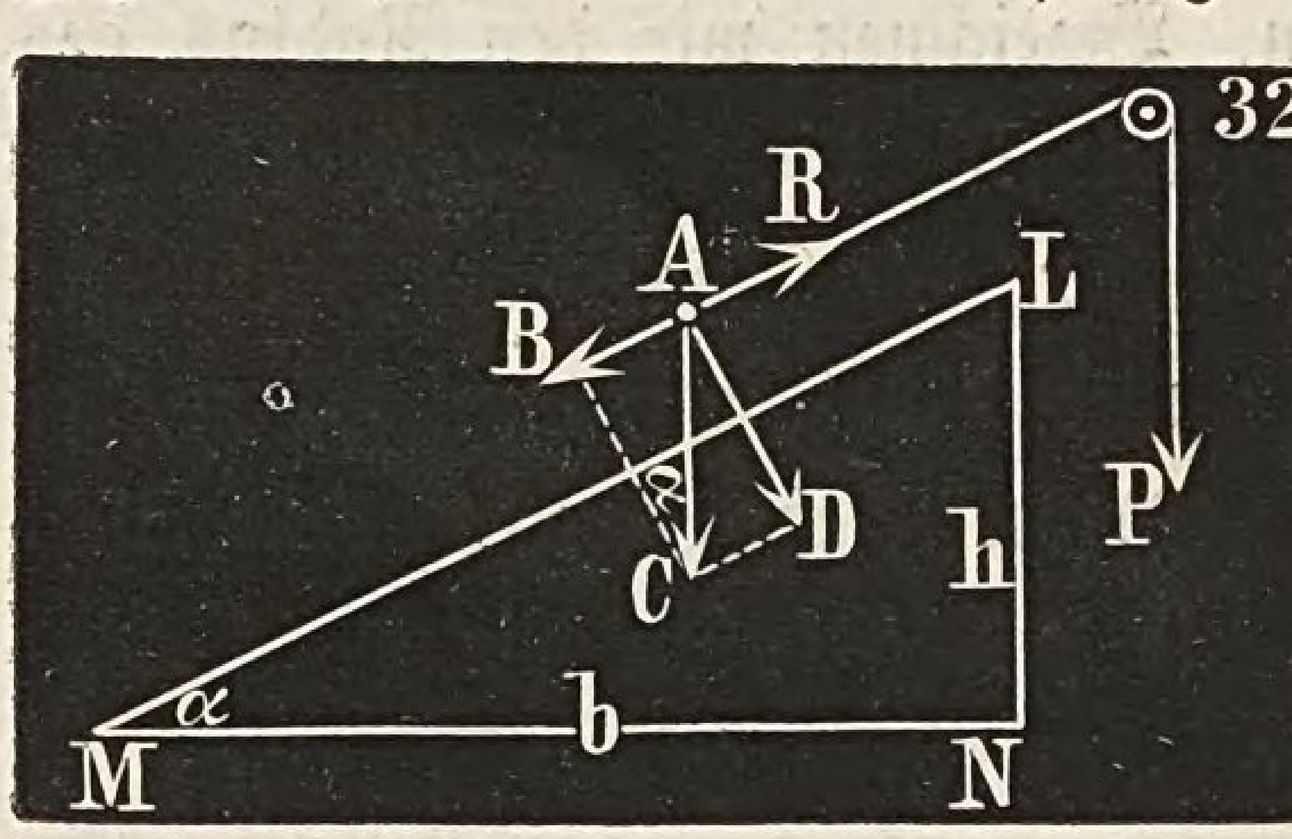
Ende die Last Q sich befindet, windet sich um die Welle (1); das damit verbundene Rad greift in die Welle (2); welche vermittelst des Kurbelarms von der Kraft P in A in Bewegung gesetzt wird. Die Maschine besteht also, wie die Winde, aus zwei Wellen, einem Rade und einer Kurbel und ist wesentlich eine Zusammensetzung aus zwei Hebeln. Die Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$a \cdot R \cdot P = r \cdot r_1 \cdot Q.$$

§ 101. Zusatz. Eine ähnliche Maschine ist der Krahn oder Kranich, welche nur eine Welle mit einem gezahnten Rade mehr enthält, und zum Heben schwerer Lasten an Ladeplätzen der Frachtgüter zu Wasser und zu Land benützt wird. Die Gleichgewichtsbedingung ist

$$a \cdot R \cdot R_1 \cdot P = r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot Q.$$

§ 102. **Die schiefe Ebene.** Schief heißt jene Ebene, welche gegen den Horizont eine Neigung $\alpha < 90^0$ hat. In Fig. 32 stellt MN die Richtung der horizontalen, LN die der

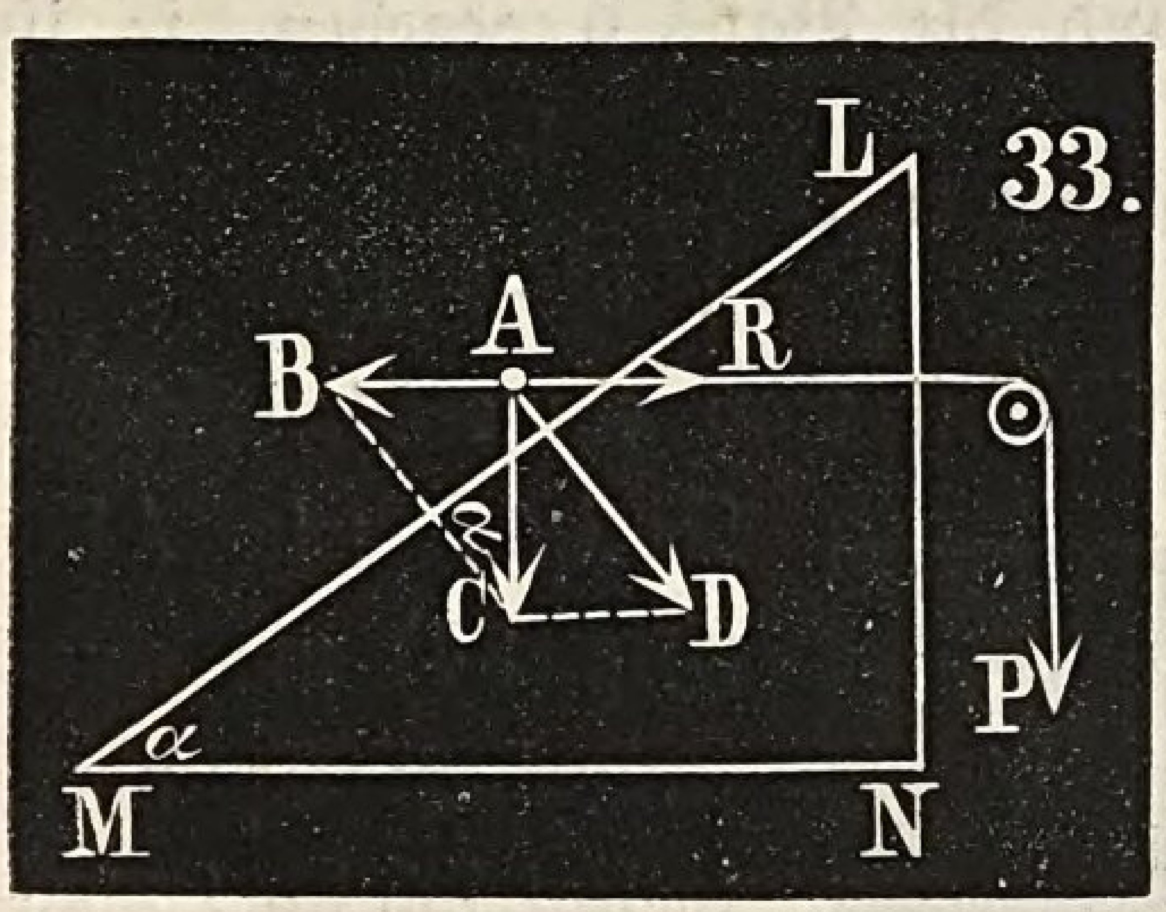


vertikalen und LM die der schiefen Ebene vor. Da LN $\perp$ MN ist, so heißt LN auch die Höhe und MN die Basis der schiefen Ebene. Befindet sich eine Last vom Gewichte Q, deren Schwerpunkt in A sei, auf einer solchen Ebene, so wird sie von der Schwerkraft in der Richtung AC $\#$ LN mit einer Stärke gleich ihrem Gewichte angezogen gerade so, als wäre die ganze Masse im Schwerpunkte A vereinigt. Die Ebene, welche wir vollkommen g l a t t d. i. reibungsfrei voraussetzen, leistet Widerstand und der Körper wird, sich selbst überlassen, anfangen, längs LM abwärts

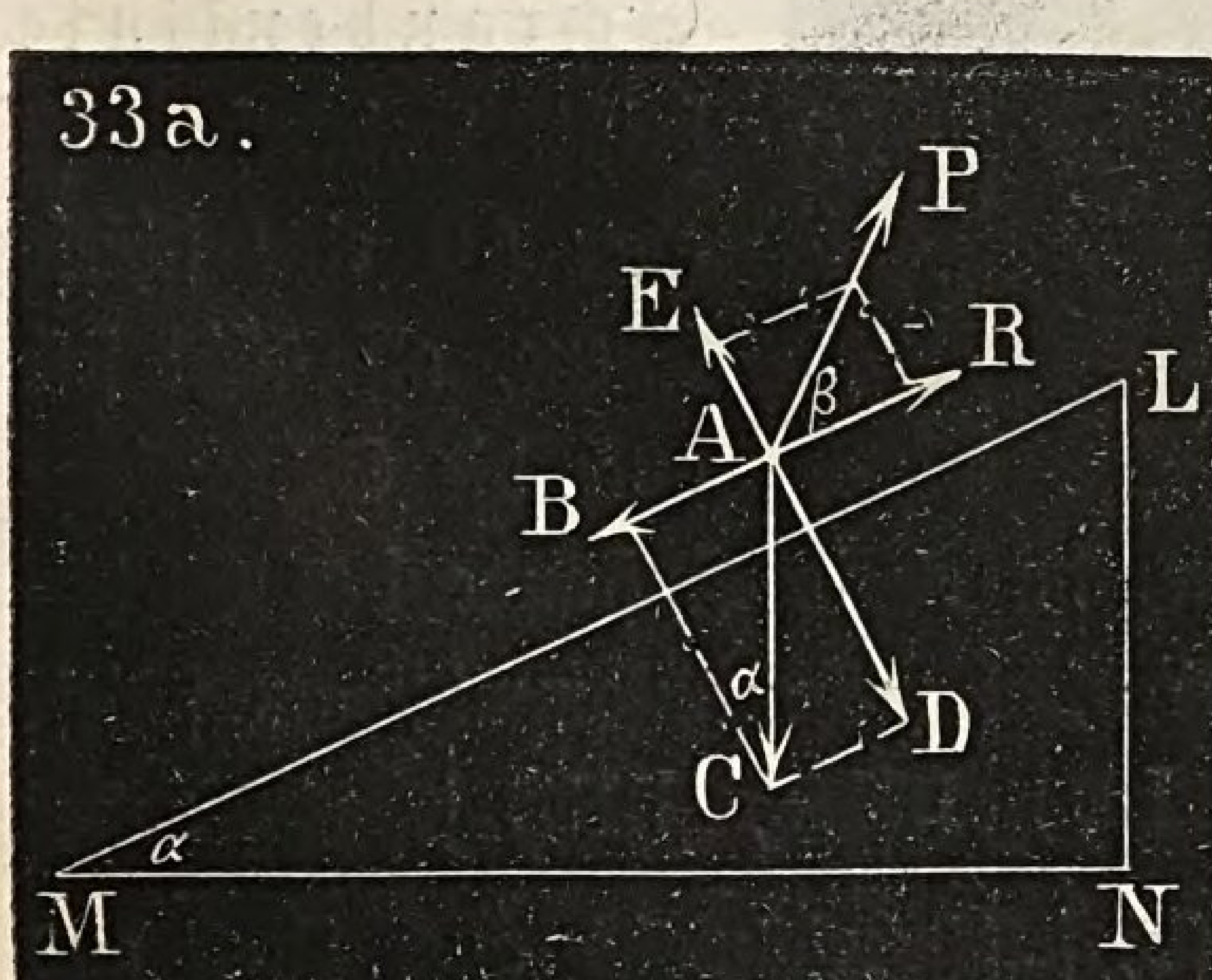
zu gleiten. Soll aber die Last auf der Ebene erhalten bleiben, so muß eine Kraft P angebracht werden, deren Größe zu bestimmen ist. Obwohl diese Kraft eine willkürliche Richtung erhalten kann, so kommen in der Regel doch nur zwei Richtungen in Anwendung; entweder wird die Kraft der schiefen Ebene oder ihrer Basis parallel angebracht.

a) Wirkt P $\parallel$ LM (Fig. 32) und zerlegen wir die Kraft AC = Q in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AD, so haben wir in A zwei Kräfte anstatt AC, von denen AD durch den Widerstand der Ebene aufgehoben wird, so daß AB allein den Körper zum Gleiten bringt. Wird demnach in A in der entgegengesetzten Richtung AR eine Kraft P angebracht, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn P = AB ist.

b) Wirkt die Kraft horizontal', also $\parallel$ MN, so läßt sich die von Q ausgehende Kraft AC (Fig. 33) in zwei Komponenten AB und AD zerlegen, von denen AB $\parallel$ MN und AD $\perp$ LM wirkt. AD wird durch den Widerstand der Ebene aufgehoben und AB bringt Q allein zum Gleiten. Es wird also Gleichgewicht eintreten, wenn in der entgegengesetzten Richtung AR eine Kraft P = AB angebracht wird.



c) Macht (Fig. 33a) die Kraft P mit LM einen Winkel β, so läßt sich Q in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AD, so wie P in AR und AE $\parallel$ und $\perp$ LM zerlegen. Der aus AD und AE resultierende Druck wird von der Ebene LM aufgehoben; folglich besteht die Bedingung des Gleichgewichts darin, daß AR = AB sei.



Nun ist in Beziehung auf Fig. 33a

$$AB = AC \sin\alpha = Q \sin\alpha;\quad AD = AC \cos\alpha = Q \cos\alpha$$
$$AR = AF \cos\beta = P \cos\beta;\quad AE = AF \sin\beta = P \sin\beta$$

Hieraus folgt einerseits

$$(1)\ P \cos\beta = Q \sin\alpha;$$

andrerseits, wenn wir den Druck mit D bezeichnen,

$$D = AD - AE = Q \cos\beta - P \sin\beta,$$ oder

wenn wir nacheinander Q und P eliminieren

$$(2)\ D \cos\beta = Q \cos(\alpha + \beta)$$
$$(3)\ D \sin\alpha = P \cos(\alpha + \beta)$$

Für den Fall (a) $P \parallel LM$ ist $\beta = o$ zu setzen; folglich

$$(4)\ P = Q \sin\alpha;\ (5)\ D = Q \cos\alpha;\ (6)\ P = Q \operatorname{tang}\alpha^*;$$

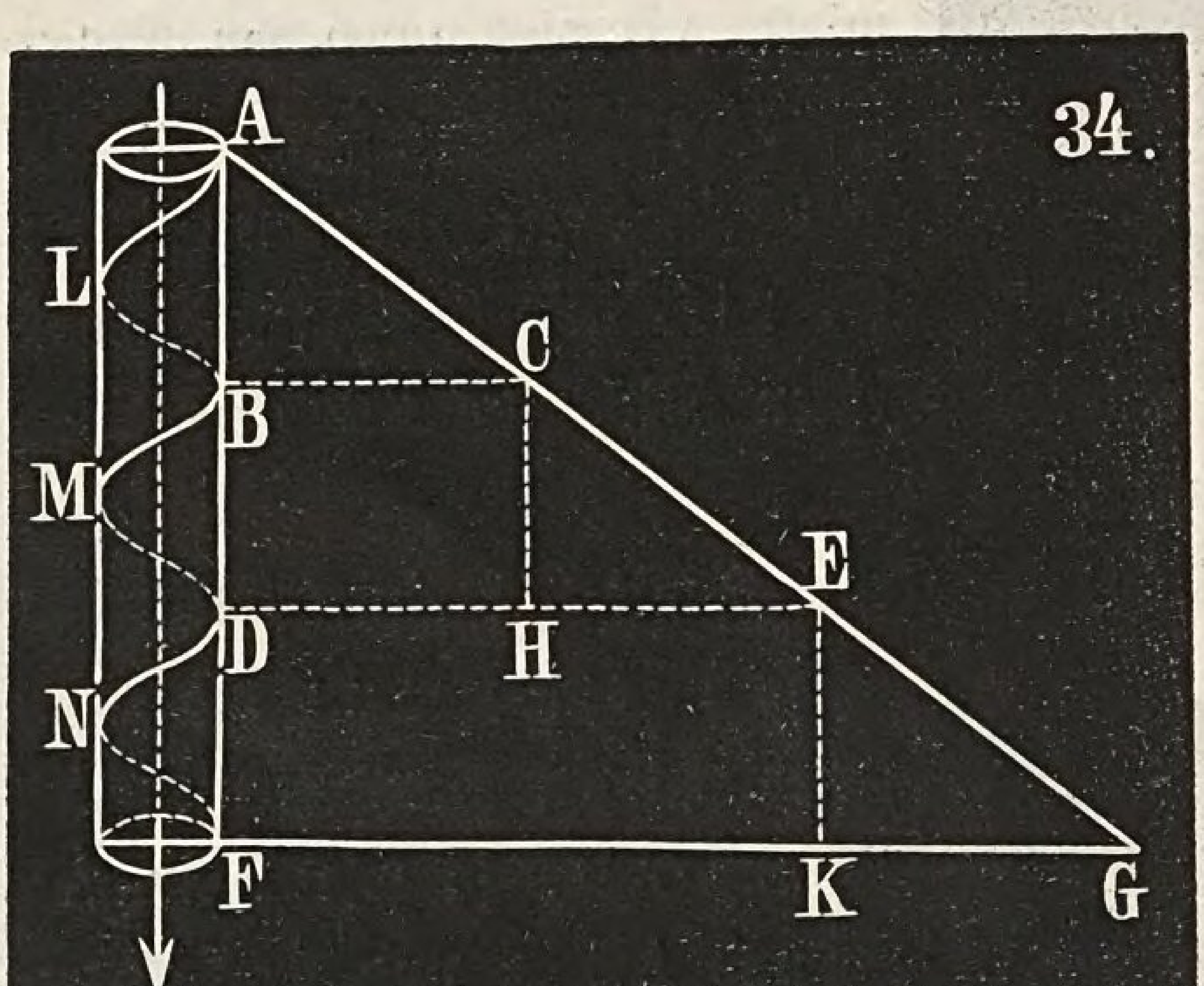
für den Fall (b) $P \parallel MN$ ist $\beta = -\alpha$ zu setzen; mithin

$$(7)\ P = Q \operatorname{tang}\alpha;\ (8)\ D \cos\alpha = Q;\ (9)\ P = D \sin\alpha^*.$$

Ist anstatt α die Höhe h und die Basis b gegeben, so ist

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{b^2 + h^3}} \text{ und } \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{b^2 + h^2}}.$$

§ 103. **Die Schraube.** Wickelt man ein rechtwinkeliges Dreieck, wie AFG (Fig. 34) um einen senkrechten Cylinder, so legt sich die Hypotenuse AG in Gestalt einer krummen Linie herum, welche S c h r a u b e n l i n i e heißt. Andrerseits ist aber AG eine schiefe Ebene, also läßt sich auch die Schraubenlinie in jedem einzelnen Punkte, da es im Zustande des Gleichgewichts auf die übrige Gestalt nicht mehr ankommt, als schiefe Ebene betrachten. Ist nun ALB, BMD, DNE je ein voller



34.

* Diese Resultate ergeben sich selbstverständlich auch direkt aus Fig. 32 und 33.

Umgang und ziehen wir BC $\#$ DE $\#$ FG, sowie CH $\#$ EK $\#$ AF, so ist notwendig BC $=$ HE $=$ KG $= 2r\pi =$ dem Cylinderumfang, wenn r dessen Radius bezeichnet. Auf jeden Schraubenumgang trifft daher eine Strecke s $=$ AC $=$ CE $=$ EG und eine Höhe h $=$ AB $=$ BD $=$ DF. Der senkrechte Abstand* AB heißt Schraubenweite, der Cylinder Schraubenspindel und und die der Spindel angepaßte Höhlung Schraubenmutter, das Ganze (Spindel und Mutter) nennt man Schraube. In der Anwendung dient die Schraube, teils einen Druck auszuüben, wie bei Pressen, teils Lasten zu bewegen. In allen Fällen erklärt sich ihre Wirkungsweise aus der Theorie der schiefen Ebene, indem hier wie dort nicht die Ausdehnung der Last, sondern nur ihr im Schwerpunkt angreifendes Gewicht in Betracht kommt. Die Kraft P wirkt bei jeder Schraube $\#$ der Basis und hat ihren Angriffspunkt entweder in der Peripherie der Spindel oder an einem Hebelarm, der mit der Achse der Spindel fest verbunden ist, während die Last in der Richtung AF $\perp$ FG wirkt. Die Bedingung des Gleichgewichts ist daher nach Gl. (7) des vorigen Paragraphen.

$$(1) \quad P = Q \text{ tang } AGF = Q \frac{AB}{BC} = Q \cdot \frac{h}{2r\pi} = Q \text{ tg } \alpha,$$

wenn P im Spindelumfang angreift. Denken wir uns eine zweite Spindel vom Radius $=$ a und alle übrigen Größen ungeändert, so haben wir gleichfalls

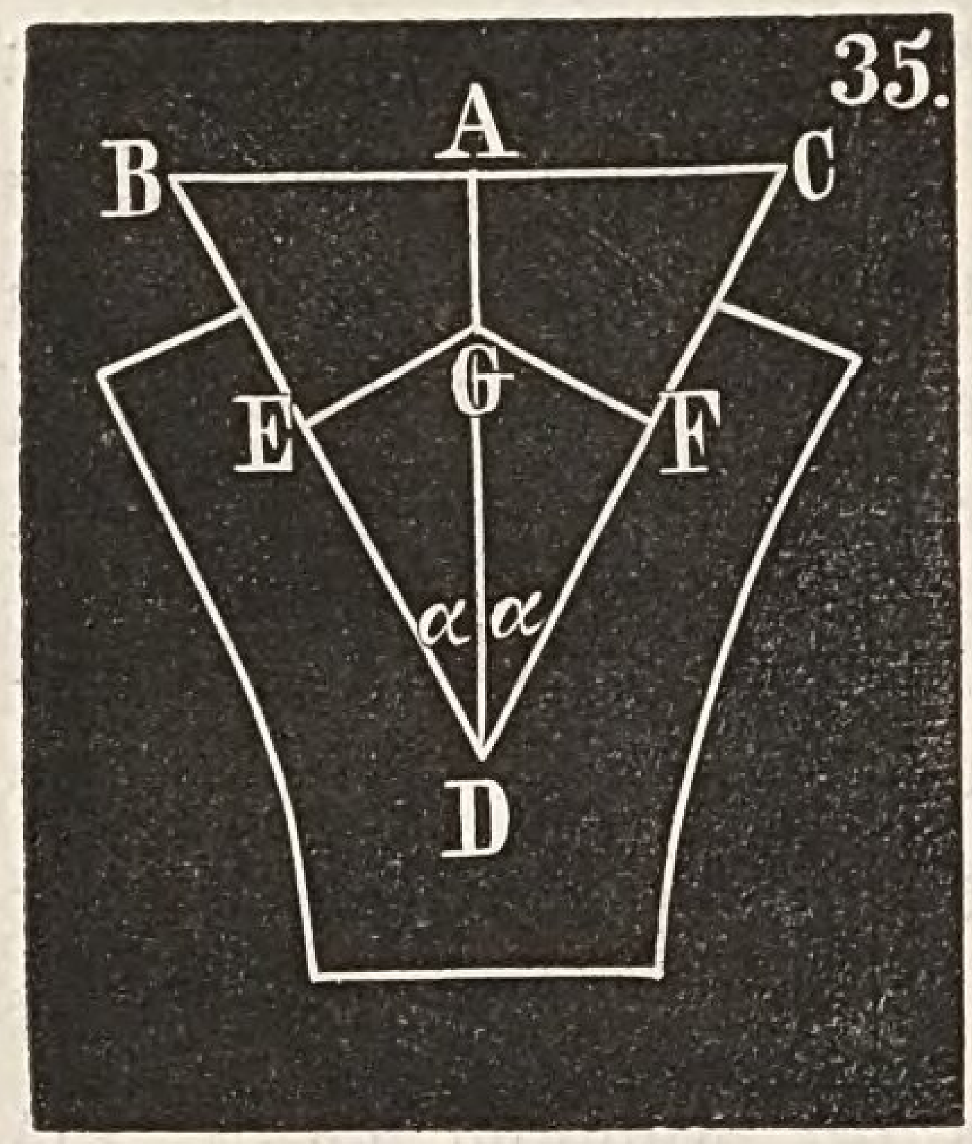
$$(2) \quad P = \frac{h \cdot Q}{2a\pi} = \frac{r}{a} \cdot \frac{h \cdot Q}{2r\pi} = \frac{r}{a} Q \text{ tg } \alpha.$$

Nun ist es aber ganz einerlei, ob wir uns unter a den Spindelradius, oder einen Hebelarm vorstellen, der mit der Achse fest verbunden ist und auf ihr senkrecht steht; mithin drückt (2) auch die Gleichgewichtsbedingung für den Fall aus, daß die Kraft an einem Hebelarm $=$ a angreift.

---

* In Wirklichkeit ist die Schraubenweite immer kleiner als AB, weil bei der Aushöhlung der Schraubengänge zu beiden Seiten der Kurve Cylinderteile gelassen werden müssen.

§ 104. **Der Keil.** Derselbe ist ein dreiseitiges Prisma, dessen Basis ein beliebiges Dreieck sein kann, in der Regel jedoch ein rechtwinkeliges oder gleichschenkeliges Dreieck ist. Der Keil dient zum Heben, Klemmen, Trennen, Spalten u. s. w. fester Körper. Die eindringende Kante heißt Schneide, die gegenüberliegende Fläche Rücken des Keiles. In dem gleichschenkeligen △ BCD (Fig. 35), welches einen normalen Schnitt vorstellt, sind BD = CD = s die Seiten, AD = h die Höhe (Länge), BC = b die Breite des Keiles. Wird nun ein solcher Keil durch eine Kraft P, welche in A der Mitte von BC angreift und längs AD wirkt, in einen festen Körper eingetrieben, so bewegen sich die Seiten BD und CD parallel zu sich selbst und haben einen gewissen Widerstand zu überwinden. Obwohl jeder eindringende Punkt der Seiten auf Widerstand stoßt, so kann doch, da eine Drehung unmöglich ist, die Summe aller Widerstände durch eine Einzelkraft D ausgedrückt werden, welche auf beiden Seiten gleich sein und ihren Angriffspunkt in E und F haben sollen.



Sind die Seiten vollkommen glatt, so ist der in E und F wirkende Widerstand nichts anderes, als ein auf BD und CD normaler Druck = D. Verlegen wir die Angriffspunkte nach G, so ist die Bedingung des Gleichgewichts, daß AG = P der Resultante aus EG = FG = D Gleichgewicht hält, wenn wir das Gewicht des Keiles außer Acht lassen. Setzen wir

$\angle$ BDA = $\angle$ CDA = α, also $\angle$ EGF = 180 − 2 α,

so folgt nach § 19, (6)

$$(1)\quad P = 2D\cos(90-\alpha) = 2D\sin\alpha, \text{ oder auch}$$

$$(2)\quad P = \frac{D\cdot b}{s} = \frac{2D\cdot b}{\sqrt{b^2+4h^2}}.$$

Ist der Widerstand zu beiden Seiten ∥ BC und = Q, so können wir Q analog § 102 in eine tangentiale und normale

Komponente Q $\sin\alpha$ und Q $\cos\alpha$ zerlegen und bemerken, daß Q $\sin\alpha$ verloren geht, weil die Seiten glatt vorausgesetzt werden, während Q $\cos\alpha$ an die Stelle von D in Gl. (1) und (2) tritt; mithin ist

$$(3)\quad P = 2Q\cos\alpha\sin\alpha = Q\sin 2\alpha, \text{ oder auch}$$

$$(4)\quad P = \frac{Q\cdot bh}{s^2} = \frac{4Q\cdot bh}{b^2 + 4h^2}.$$

Anm. Wird ein freier Keil von zwei gleichen Gegenkräften in Punkten E und F angegriffen, so daß die Kraftrichtungen mit EF zusammenfallen, so besteht nach § 9 Gleichgewicht, und es müßte jede weitere Kraft P im Widerspruch mit Gl. (3) oder (4) dies Gleichgewicht stören. Thatsächlich findet Gleichgewicht statt, wenn die Angriffspunkte E und F so beschaffen sind, daß die Kräfte, wie z. B. durch Ringe, Haken, Stifte, Erhöhungen und Vertiefungen u. d. gl. in jeder Richtung angreifen können; sind aber E und F nichts weiter als Punkte zweier festen, glatten, geneigten Ebenen, so findet in Wahrheit nicht Gleichgewicht statt, weil die tangentiale Komponente keinen Angriffspunkt hat und ebendeßwegen wirkungslos verloren gehen muß, so daß bei dieser Voraussetzung Gl. (3) oder (4) allein das Richtige gibt. Sind die Seitenflächen rauh, so tritt Reibung als eine weiter zu berücksichtigende Kraft hinzu. Vergl. § 178, III.

II. Teil.

Dynamik.

Erstes Kapitel.

Von der Bewegung überhaupt.

§ 105. **Grundbegriffe.** Befindet sich ein Punkt, der entweder isoliert oder als Bestandteil eines festen Körpers gedacht werden kann, in Bewegung, so ändert er beständig seinen Ort und beschreibt einen Raum, welcher sein Weg oder seine Bahn (Trajektorie) heißt und sowohl gerad- als auch krummlinig sein kann. In diesem Zustande muß er solange beharren, als er nicht durch eine äußere Ursache oder Kraft daran gehindert wird.

(Gesetz der Trägheit). Erfolgt die Bewegung ohne Hindernisse und Zwang, so heißt sie frei, außerdem unfrei; die Bewegung heißt überdies absolut oder relativ, je nachdem sie auf einen in absoluter Ruhe oder in Bewegung befindlichen Punkt bezogen wird. Jede Bewegung erfordert Raum und Zeit zugleich. Als Maaßeinheit des Raumes wählen wir den Meter, für die Zeit die Sekunde, ohne übrigens für besondere Fälle andere Maaßeinheiten auszuschließen.

§ 106. **Bewegungsarten eines Punktes.** Jeder in Bewegung sich befindliche Punkt beschreibt entweder stets neue Punkte seiner Bahn, ohne umzukehren, oder er bewegt sich in derselben Bahn abwechselnd vorwärts und rückwärts; im ersteren Falle heißt die Bewegung fortschreitend* (progressiv), im letzteren schwingend (oscillierend). Beschreibt er in gleichen Zeiten gleiche Wege, so heißt seine Bewegung gleichförmig, außerdem ungleichförmig oder veränderlich.

§ 107. **Geschwindigkeit.** Haben zwei Punkte gleichförmige Bewegung und beschreiben sie in derselben Zeit ungleiche Wege, so haben sie verschiedene Geschwindigkeit. Der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg heißt Geschwindigkeit. Beschreibt ein Punkt bei gleichförmiger Bewegung in t Sekunden einen Weg = s (spatium), so ist der in einer Sekunde zurückgelegte Weg s : t, also seine Geschwindigkeit, welche wir fortan mit v (velocitas) bezeichnen, ausgedrückt durch

$$v = \frac{s}{t}$$

d. h. mit anderen Worten: Geschwindigkeit ist der Weg dividiert durch die Zeit, wobei die Wahl der Zeiteinheit noch willkürlich bleibt.

§ 108. **Lehrsatz.** Der Weg, den ein Punkt mit gleichförmiger Bewegung beschreibt, ist gleich dem Produkte aus Zeit und Geschwindigkeit, d. h. $s = v \cdot t$.

---

* Dies gilt auch noch, wenn der Punkt einen Kreis oder eine geschlossene Kurve wiederholt beschreibt.

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich sowohl aus der vorigen Gleichung für v, als auch durch folgende Betrachtung. Der Punkt beschreibt in jeder Sekunde einen Weg = v, also in 2 Sekunden 2v, in 3 Sekunden 3v, ... und in t Sekunden tv; mithin

$$s = vt.$$

§ 109. **Erklärung.** Bei der veränderlichen Bewegung ist auch die Geschwindigkeit in jedem Augenblick eine andere und es kann der in einer Sekunde zurückgelegte Weg nicht mehr als Ausdruck der Geschwindigkeit in obigem Sinne genommen werden. Nimmt nun die Geschwindigkeit in jeder Sekunde um dieselbe Größe zu oder ab, so heißt die Bewegung gleichförmig beschleunigt, beziehungsweise gleichförmig verzögert. Die konstante Zu- und Abnahme der Geschwindigkeit heißt Beschleunigung, beziehungsweise Verzögerung und wird fortan mit a (acceleratio) bezeichnet. Bewegungen mit veränderlicher Belchleunigung bleiben mit Ausnahme der Pendelbewegung von unserer Betrachtung ausgeschlossen.

§ 110. **Lehrsatz.** Bei der gleichförmig beschleunigten, von der Ruhe ausgehenden Bewegung ist die erlangte Geschwindigkeit gleich dem Produkte aus Beschleunigung und Zeit; also $v = a \cdot t$.

Beweis. Da die Geschwindigkeit mit o beginnt und in jeder Sekunde um a zunimmt, so ist am Ende der 1. Sekunde $v = a$, am Ende der 2. Sekunde $v = 2a$ . . . . ., am Ende der t. Sekunde $v = t \cdot a$.

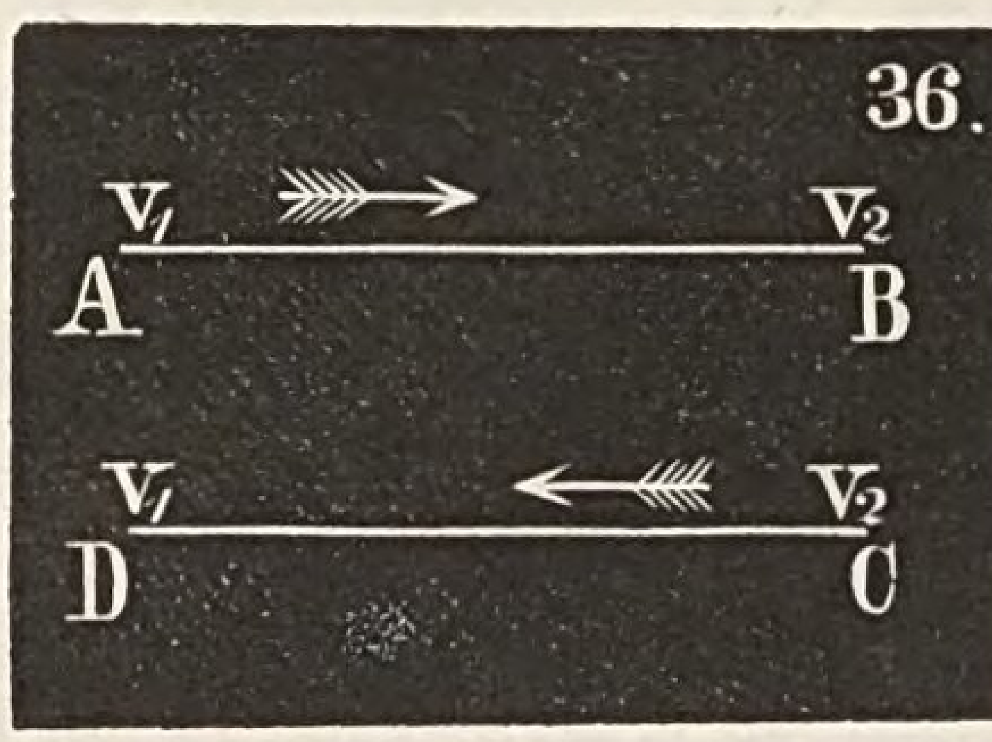
§ 111. Zusatz. Hat der Punkt zur Zeit $t = o$ schon eine Geschwindigkeit $= v_o$, so ist seine nach t Sekunden erlangte Geschwindigkeit v entweder

$$v = v_o + at, \text{ oder}$$
$$v = v_o - at,$$

je nachdem die Bewegung eine beschleunigte, oder eine verzögerte ist, oder je nachdem die Beschleunigung positiv oder negativ ist

§ 112. **Lehrsatz.** Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der zurückgelegte Weg ausgedrückt durch das Produkt aus Zeit und dem arithmetischen Mittel der Anfangs- und Endgeschwindigkeit; also $s = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\,t$.

Beweis. Angenommen, es bewege sich ein Punkt in der Zeit t von A nach B (Fig. 36) und habe in A und B beziehungsweise die Geschwindigkeit v_1 und v_2, so können wir in Gedanken gleichzeitig einen zweiten Punkt von C nach D in der Weise sich bewegen lassen, daß er während derselben Zeit t und mit gleichförmig abnehmender Geschwindigkeit einen gleichen Weg CD = AB beschreibe, so zwar, daß er in C mit der Geschwindigkeit v_2 anfange und in D mit v_1 endige. Hat nun der erste Punkt nach einer gewissen Zeit an Geschwindigkeit um x zugenommen, also eine Geschwindigkeit $= v_1 + x$ erreicht, so hat der andere Punkt um ebensoviel abgenommen, also eine Geschwindigkeit $= v_2 - x$ erlangt. Die Summe aus beiden Geschwindigkeiten gibt $(v_1 + x) + (v_2 - x) = v_1 + v_2$, d. h. sie ist während der ganzen Dauer der Bewegung unveränderlich. Daraus folgt, daß beide Punkte in jeder Sekunde die gleiche Summe Weges von der Größe $v_1 + v_2$ beschreiben. Beide Punkte beschreiben daher in t Sekunden einen Weg $= (v_1 + v_2)\,t$. Andrerseits ist aber die Summe der Wege AB + CD = 2AB; mithin



$$2AB = (v_1 + v_2)\,t, \text{ oder wegen } AB = s$$

$$s = \frac{1}{3}(v_1 + v_2)\,t.$$

§ 113. Zusatz. Da nun der Punkt zur Zeit t = o die Geschwindigkeit v_1 und nach t Sekunden die Geschwindigkeit v_2 erlangt, so folgt nach § 111 für alle Fälle $v_2 = v_1 \pm at$, und vermöge dieses Wertes für den Weg AB = s die Gleichung

$$(1) \quad s = v_1 t \pm \tfrac{1}{2} at^2,$$

je nachdem die Bewegung beschleunigt oder verzögert ist. Für v = o folgt hieraus weiter

$$(2) \quad s = \tfrac{1}{2} at^2, \text{ d. h.}$$

bei der gleichförmig beschleunigten und von der Ruhe ausgehenden Bewegung ist der Weg gleich dem halben Produkte aus der Beschleunigung und dem Quadrate der Zeit. Setzen wir noch at = v nach § 110, so ist

(3) $s = \frac{1}{2} vt$, d. h.

der Weg ist auch gleich dem halben Produkte aus Zeit und Endgeschwindigkeit. Außerdem erhalten wir noch durch Transformation der Gl. (2) in Verbindung mit (3)

(4) $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ und (5) $v = \sqrt{2as}$

zur Bestimmung von t und v, wenn a und s gegeben sind.

§ 114. Zusatz. Während der Dauer von t Sekunden sind die einzelnen Endgeschwindigkeiten von Sekunde zu Sekunde der Reihe nach a, 2a, 3a, ... ta, folglich ist der in dieser Zeit zurückgelegte Weg in Rücksicht auf 112 ausgedrückt durch

$$s = \frac{o + a}{2} + \frac{a + 2a}{2} + \frac{2a + 3a}{2} + \ldots\ldots + \frac{(t-1)a + ta}{2}$$

$$s = \frac{a}{2} + \frac{3a}{2} + \frac{5a}{2} + \ldots\ldots + \frac{(2t-1)a}{2}; \text{ oder}$$

$$s = \frac{a}{2}\left(1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2t-1)\right); \text{ oder}$$

$$s = \frac{a}{2} \cdot \frac{(1 + 2t - 1)t}{2} = \frac{a}{2} t^2, \text{ wie oben (2.)}$$

§ 115. Zusatz. Aus den zwei allgemeinen Gleichungen

$v = v_o + at$ § 111 und $s = \frac{1}{2}(v + v_o)t$ § 112

erhalten wir noch durch Elimination von t die bemerkenswerte Gleichung

$$v^2 - v_o^2 = 2as$$

§ 116. Zusatz. Für t = 1 ergibt sich aus Gl. (2) § 113

$$a = 2s, \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist doppelt so groß, als der in der ersten Sekunde zurückgelegte Weg; wenn die Bewegung von der Ruhe ausgeht.

§ 117. **Bewegungsarten eines Körpers.** Bewegt sich ein Körper so, daß alle Punkte desselben Bahnen mit derselben Geschwindigkeit beschreiben, ohne umzukehren, so heißt die Bewegung fortschreitend und läßt sich geradeso behandeln, wie die Bewegung eines Punktes; ist dagegen die Bewegung so beschaffen, daß die beweglichen Punkte des Körpers nur Kreisbögen um eine feste Gerade (unbewegliche Achse) stets in demselben Sinne beschreiben, so heißt sie drehend (rotierend); ist endlich die drehende Bewegung der Art, daß die einzelnen Punkte des Körpers beständig in denselben Kreisbögen sich hin und her bewegen, so heißt sie schwingend. Jede andere Bewegung, wie kompliziert sie auch sein mag, läßt sich auf diese einfachen Bewegungen zurückführen oder mit anderen Worten: jede Bewegung eines Körpers von A nach B läßt sich durch Schraubenbewegungen ausführen.

§ 118. **Lineare und Winkelgeschwindigkeit.** Bei einer drehenden Bewegung eines Körpers mit konstanter Geschwindigkeit beschreiben die einzelnen Punkte in derselben Zeit Bögen von verschiedener Größe und haben daher verschiedene Geschwindigkeit. Beschreibt ein Punkt A in der Entfernung $AC = r$ von der Drehachse in der Zeiteinheit den Bogen AB, so kann man seine Geschwindigkeit entweder wie bisher durch Bogen AB, oder auch durch den Centriwinkel ACB messen; erstere heißt lineare, letztere Winkelgeschwindigkeit. Bezeichnen wir diese Geschwindigkeiten beziehungsweise mit v und ω und verstehen wir unter ω sowohl den Winkel als auch den Bogen, welchen ein Punkt in der Entfernung $r = 1$ beschreibt, so haben wir aus geometrischen Gründen für die lineare Geschwindigkeit einerseits

$$v : \omega = r : 1, \text{ oder}$$

(1) $v = r\omega$; andrerseits nach § 107

(2) $$v = \frac{2 r \pi}{T},$$

wenn T die Umlaufszeit, d. i. die Dauer einer vollen Umdrehung bezeichnet; und für die Winkelgeschwindigkeit

$$(3)\ \omega = \frac{360}{T},\ \text{oder}\ \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ist ferner s der Weg, φ der Winkel, den ein Punkt in der Zeit t beschreibt, so haben wir analog § 108

$$(4)\ \varphi = \omega t;\ (5)\ s = r\varphi = r\omega t.$$

§ 119. **Winkelbeschleunigung.** Ist die drehende Bewegung beschleunigt, so finden für die lineare Beschleunigung alle früheren Formeln über beschleunigte Bewegung unbeschränkte Anwendung. Bezeichnen wir mit α die Winkelbeschleunigung, mit ω die Winkelgeschwindigkeit, mit φ den beschriebenen Winkel, so sind α, ω, φ dieselben Größen für einen Radius $r = 1$, welche wir bisher für gerad- und krummlinige Bewegungen mit a, v, s bezeichnet haben. Demzufolge haben wir die sehr einfachen Beziehungen

$$(1)\ a = r\alpha;\ v = r\omega;\ s = r\varphi,$$

wenn r der Radius des Kreises ist, den ein beliebiger Punkt beschreibt. Setzen wir diese Werte in die früheren Gleichungen, so erhalten wir die für eine beschleunigte drehende und schwingende Bewegung allgemein giltigen Gleichungen

$$(2)\ \omega = \omega_0 + \alpha t \text{ aus § 111.}$$

$$(3)\ \varphi = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\,t = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \text{ § 112 und 113}$$

$$(4)\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi \text{ aus § 115}$$

worin α sowohl positiv als negativ und $\omega_0 = 0$ sein kann.

Zweites Kapitel.

Von der Bewegung in Verbindung mit Kraft.

§ 120. **Grundsatz.** Die Wirkung einer Kraft auf einen materiellen Punkt bleibt dieselbe, ob der Punkt in Ruhe oder in Bewegung ist, oder mit anderen Worten: in allen Fällen wird die Bewegung, welche aus der einwirkenden Kraft entsteht, mit derjenigen verbunden, die der Körper früher schon hatte; oder endlich noch: wird ein Punkt von zwei Kräften gleichzeitig

in Bewegung gesetzt, so kommt jede einzelne Bewegung ebenso zur vollen Geltung, als wenn die andere nicht vorhanden wäre.

Anm. Die Wahrheit dieses wichtigen Satzes erkennen wir nicht unmittelbar als logische Notwendigkeit, weil wir über das Wesen der Kraft noch zu sehr im Dunkeln sind, sondern aus der Uebereinstimmung der hieraus fließenden Konsequenzen mit der Erfahrung.

§ 121. **Erklärung.** Jede Kraft braucht um eine Bewegung zu erzeugen, eine gewisse Zeit. Eine Kraft, welche während der ganzen Dauer ihrer Thätigkeit auf denselben Körper gleiche Beschleunigung hervorbringt, heißt konstant.

§ 122. **Lehrsatz.** Eine Einzelkraft von konstanter Richtung kann nur eine geradlinige Bewegung hervorbringen.

Denn wird ein freier Punkt von nur einer Kraft in Bewegung gesetzt, so erfolgt der Antrieb zur Bewegung nur in bestimmter Richtung, also notwendig in einer Geraden, welche der Punkt nach dem Gesetze des Beharrungsvermögens solange beschreiben muß, bis er durch eine äußere Ursache daran gehindert wird. Da nun nach der Voraussetzung die Kraft die einzige einwirkende Ursache ist und diese ihre Richtung nicht ändert, so kann der Punkt in keinem Falle eine andere Bahn beschreiben, als eine geradlinige.

§ 123. **Lehrsatz.** Eine Kraft von konstanter Intensität erzeugt stets eine gleichförmig beschleunigte Bewegung längs ihrer Richtung.

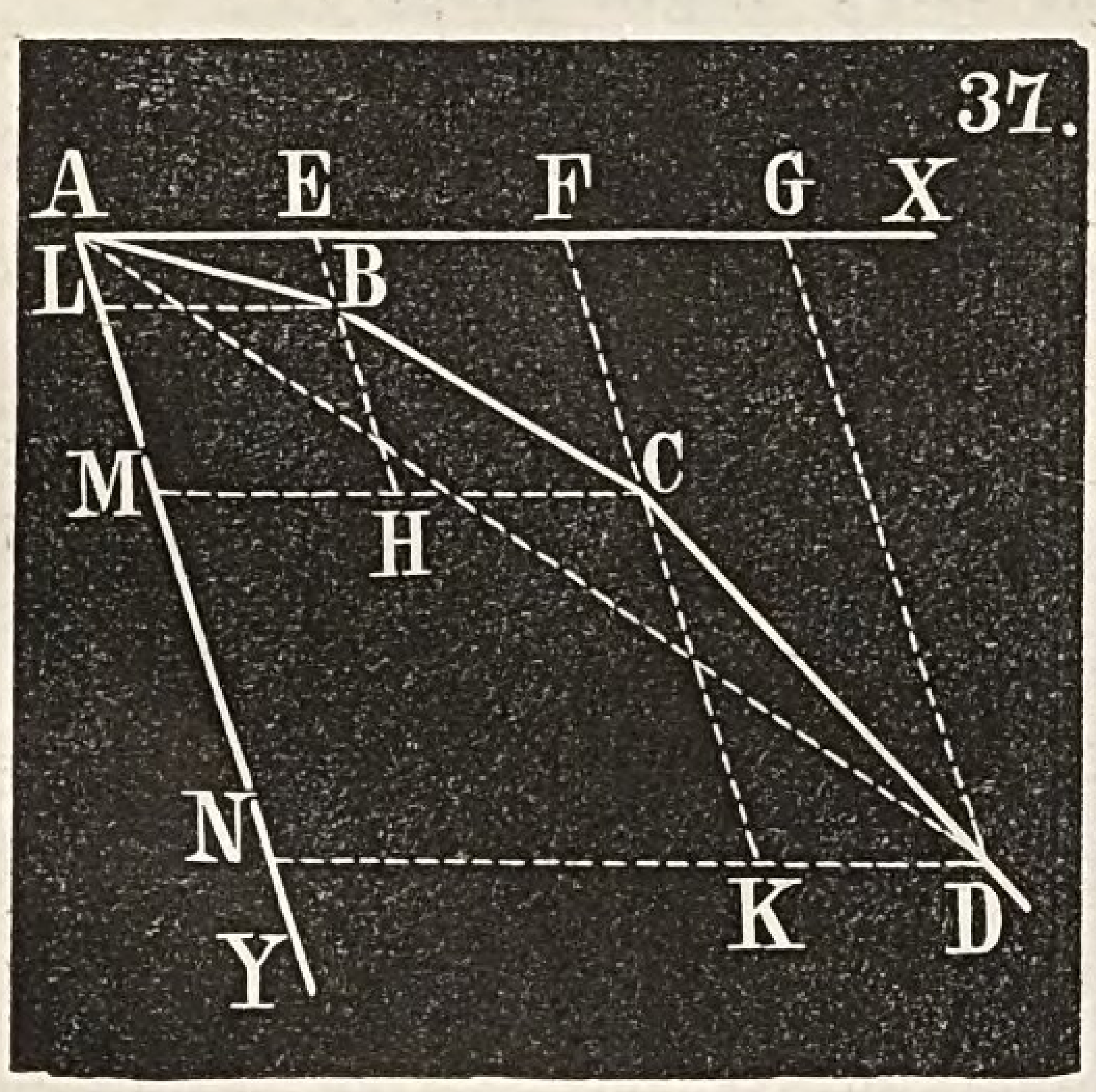
Beweis. Erlangt ein von dieser Kraft allein in Bewegung gesetzter freier Punkt am Ende der ersten Sekunde die Geschwindigkeit = a, so müßte er sich nach dem Gesetze der Trägheit mit dieser Geschwindigkeit gleichförmig fortbewegen, wenn die Kraft zu wirken aufhörte. Die Kraft wirkt aber mit gleicher Intensität auch während der zweiten Sekunde und muß daher dieselbe Geschwindigkeit = a erzeugen, wie in der ersten. Desgleichen muß die Kraft aus demselben Grunde in jeder folgenden Sekunde eine neue Geschwindigkeit = a erzeugen, gerade so, als wenn noch keine Geschwindigkeit vorausginge. Die Geschwindigkeit des Punktes

nimmt daher in jeder Sekunde um die konstante Größe a zu, folglich ist die Bewegung gleichförmig beschleunigt.

§ 124. Zusatz. Wird ein freier Punkt von einer Kraft mit veränderlicher Intensität in Bewegung gesetzt, so ist auch die Beschleunigung desselben veränderlich. Bewegt sich daher ein freier Punkt geradlinig und mit konstanter Beschleunigung, so steht er notwendig unter dem Einfluß einer konstanten Kraft.

§ 125. **Lehrsatz.** Wird ein freier Punkt von zwei nicht in einer Geraden wirkenden Kräften von konstanter Richtung in Bewegung gesetzt, so ist die Bahn gerad- oder krummlinig, je nachdem das Verhältniß ihrer respektiven Geschwindigkeiten konstant ist oder veränderlich.

Beweis. Sei (Fig. 37) A der angegriffene Punkt, AX die Richtung der einen, AY die der andern Kraft, so wird Punkt A, da jede der beiden Kräfte für sich nur eine geradlinige Bewegung erzeugen kann, von der einen Kraft in der Richtung AX, von der andern in der Richtung AY zur Bewegung angetrieben. Gesetzt der Punkt gelange längs AX in der ersten Sekunde nach E, in der zweiten nach F, in der dritten nach G u. s. w., dagegen längs AY beziehungsweise nach L, M, N u. s. w., so wird der Punkt in der ersten Sekunde in Wahrheit weder nach E noch nach L, sondern nach einem Punkt B gelangen, welcher durch die Diagonale AB des Parallelogramms AEBL bestimmt ist. Denn AB ist die Resultante aus AE und AL, ob wir darunter Kräfte oder nur ihre Wirkungen verstehen. Aus demselben Grunde gelangt der Punkt in der zweiten Sekunde von B nach C, in der dritten von C nach D u. s. w. Soll nun die Bahn ABCD . . . . eine Gerade sein, so muß notwendig statthaben



$$\triangle ALB \backsim \triangle BHC \backsim \triangle CKD$$ u. s. w. oder

$$AL : BH : CK = BL : CH : DK,$$ oder

$$AL : LM : MN = AE : EF : FG$$ d. h.

die den Kräften entsprechenden Geschwindigkeiten stehen in einem konstanten Verhältnisse. In jedem andern Fall ist die Bahn keine Gerade, sondern eine Kurve, obwohl die Figur nur die Seiten eines Polygons veranschaulicht. Dies liegt nicht im Wesen der Bewegung, sondern in der willkürlichen Zeiteinteilung. Nehmen wir die Zeitintervalle klein genug, so kommen wir auch der wahren Gestalt der Bahn immer näher. Demnach wird unter andern die Bahn geradlinig, wenn die Bewegungen des Punktes längs AX und AY beide gleichförmig, oder beide gleichförmig beschleunigt sind; dagegen krummlinig, wenn die eine gleichförmig, die andere veränderlich ist. Außerdem ist noch hervorzuheben, daß die Bahn stets in der Ebene XAY liegen muß.

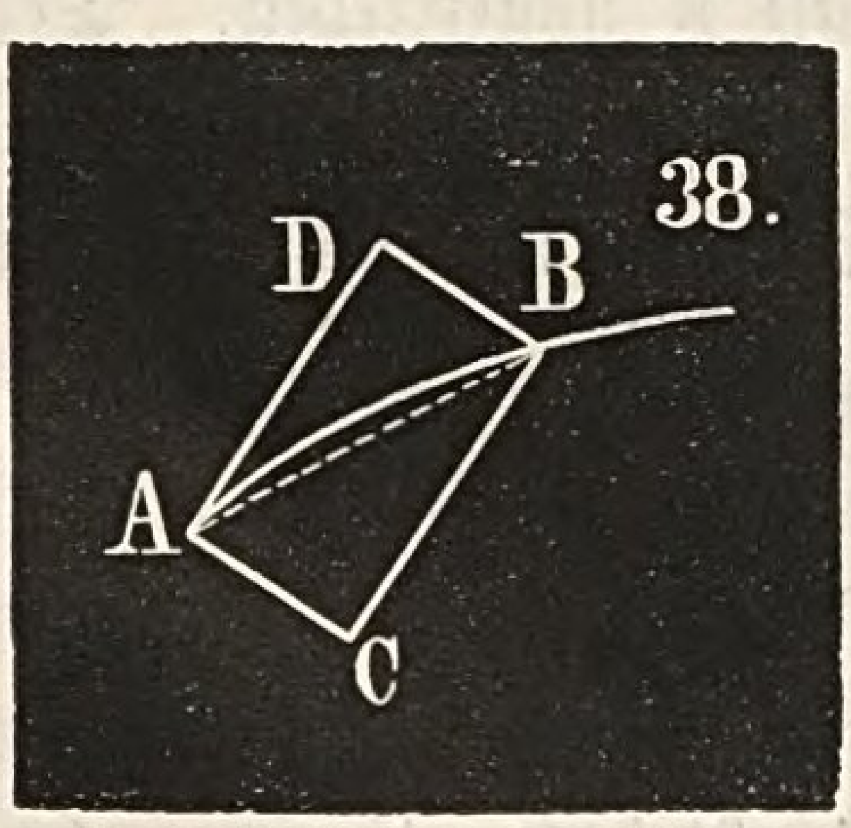
§ 126. Zusatz. Sind mehr als zwei Kräfte in einer Ebene gegeben, so lassen sich dieselben immer auf nur zwei reduzieren.

§ 127. Zusatz. Denken wir uns in A einen Punkt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit längs AX bewegt und zu irgend einer Zeit von einer konstanten Kraft in der Richtung AY angegriffen wird, so beschreibt der Punkt nach Lehrsatz eine krummlinige Bahn. Daraus erhellt, daß auch eine Einzelkraft eine krummlinige Bahn hervorbringen kann, wenn nämlich der bewegte Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit hat, deren Richtung von jener der Kraft verschieden ist. Das Nämliche gilt von zwei und mehr Kräften, deren Richtungen in eine und dieselbe Gerade fallen und die sich somit durch eine Einzelkraft gleich ihrer Summe ersetzen lassen.

§ 128. **Erklärung.** In der Folge heißen wir die Geschwindigkeiten in der Geraden AX und AY die Seitengeschwindigkeiten des Punktes, dagegen jene in der Bahn ABCD .... die Bahngeschwindigkeit desselben. Das Nämliche gilt von der Beschleunigung.

§ 129. **Richtung der Bahngeschwindigkeit.** Beschreibt ein Punkt eine krummlinige Bahn, so hat er in jedem Augenblicke eine andere Richtung. Denken wir uns die Thätigkeit der Kräfte an irgend einer Stelle D der Bahn plötzlich aufgehoben, so müßte der Punkt nach dem Prinzipe des Beharrungsvermögens gleichförmig und in der Richtung sich fortbewegen, welche er in D innegehabt hat, d. h. er müßte eine Gerade beschreiben, welche die Bahn in D berührt. Aus diesem Grunde fällt an jeder Stelle der Bahn die Richtung des bewegten Punktes mit der Tangente der Kurve zusammen.

§ 130. **Zerlegung der Bahngeschwindigkeit.** Ist umgekehrt die Bahn und Geschwindigkeit eines beweglichen Punktes gegeben, so läßt sich die in jedem Punkte der Bahn stattfindende Geschwindigkeit v beliebig in zwei Seitengeschwindigkeiten zerlegen und auch durch sie ersetzen. Gewöhnlich wählt man zu Richtungen die Tangente und die im Berührungspunkte darauf Senkrechte (Normale). Bewegt sich z. B. ein Punkt in der Zeiteinheit von A nach B (Fig. 38), und ist AD Tangente in A und ADBC ein Rechteck, so können wir



uns vorstellen, eine Kraft bewege den Punkt in derselben Zeit von A nach C und eine zweite gleichzeitig von A nach D. Dann ist AB die resultierende Bewegung der Größe und Richtung nach. Zugleich ist 2AC die normale und 2AD die tangentiale Beschleunigung* im Punkt A der Bahn. Selbstverständlich fällt Bogen AB nur näherungsweise mit der Diagonale des Rechteckes zusammen. Der Grad der Annäherung hängt von der Kleinheit der Zeit ab, welche der Punkt von A bis B braucht.

Außer der tangentialen und normalen Zerlegung werden die Geschwindigkeiten, wie die Kräfte, nach zwei festen auf ein-

---

* Die Bewegung AD kann auch gleichförmig sein, wie es bei jeder Centralbewegung bei konstanter Centralkraft der Fall ist.

ander senkrechten Richtungen (Coordinaten Achsen) mit Vorteil zerlegt.

§ 131. **Erklärung.** Um auch die Masse eines bewegten Punktes oder Körpers mit in Rechnung zu bringen, heißen wir die Kraft, welche die Masse m in Bewegung setzt, bewegende Kraft, dagegen jene, welche die Masseneinheit zur Bewegung antreibt, beschleunigende Kraft. Die erstere bezeichnen wir wie bisher mit P, die letztere mit k.

§ 132. **Lehrsatz.** Die bewegende Kraft ist gleich dem Produkte aus der Masse und der beschleunigenden Kraft; also

$$P = m \cdot k.$$

Beweis. Denken wir uns unter der Masseneinheit einen materiellen Punkt, welcher von der Kraft k mit der Beschleunigung a zur Bewegung angetrieben wird, so können wir uns vorstellen, es bewege sich in paralleler Richtung neben ihm ein zweiter Punkt mit gleicher Masse und Geschwindigkeit. Dann wird er notwendig von einer gleichen Kraft k angetrieben. Der Zustand der Bewegung bleibt nun ganz der nämliche, wenn wir in Gedanken die zwei Punkte in einen vereinigen und die Summe der Kräfte = 2k im gemeinschaftlichen Schwerpunkt angreifen lassen. Auf dieselbe Weise können wir auch m Punkte, von denen jeder von einer Kraft = k angetrieben wird, vereinigt denken. Die Kraft, welche im gemeinschaftlichen Schwerpunkt der vereinigten Masse m angreift und ihr die Beschleunigung a erteilt, ist in diesem Falle = mk. Mithin muß auch die bewegende Kraft P = mk sein, wenn sie dieselbe Beschleunigung a hervorbringen soll.

§ 133. Zusatz. Erlangt umgekehrt die Masse m durch die Kraft die Beschleunigung a, so ist die Kraft k, welche die Masseneinheit mit derselben Beschleunigung in Bewegung setzt, ausgedrückt durch

$$k = \frac{P}{m}.$$

§ 134. **Lehrsatz.** Wird die Masseneinheit von zwei ungleichen Kräften angegriffen, so erzeugt jede für sich eine Beschleunigung, welche sich verhalten, wie die Kräfte; d. h.

$$a : a_1 = k : k_1.$$

Beweis. Da wir die Kräfte überhaupt nur aus ihren Wirkungen kennen, so ist ein feststehender Grundsatz, daß jede Kraft ihrer Wirkung, also hier ihrer Beschleunigung, proportional ist. Setzen wir das Verhältniß $k : a = q$, oder was dasselbe ist, $k = aq$, so ist aus demselben Grunde die zweite Kraft $k_1 = a_1 q$; mithin

$$k : k_1 = aq : a_1 q, \text{ oder}$$
$$k : k_1 = a : a_1.$$

§ 135. Zusatz. Verstehen wir unter k_1 die Einheit der Kraft, und unter a_1 die Einheit der Geschwindigkeit, (deren Werte später genauer angegeben werden), so folgt aus den vorigen Proportionen

$$k = a, \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist dem Werte nach der beschleunigenden Kraft äquivalent.

§ 136. **Ausdruck der Beschleunigung.** Mit Rücksicht auf § 135 haben wir als Ausdruck der Beschleunigung

$$(1)\quad a = \frac{P}{m}, \text{ oder wegen } m = \frac{G}{g}\ \S\ 71$$

$$(1)\quad a = g \cdot \frac{P}{G}.$$

§ 137. **Bewegungsgleichungen.** Bewegt sich ein freier Punkt oder Körper von der Masse m in der Richtung einer konstanten Kraft P mit der Geschwindigkeit $v = v_0 + at$, so haben wir in Rücksicht auf die letzten Paragraphen

$$P = ma \text{ und}$$
$$at = v - v_0; \text{ folglich}$$

$$(1)\quad P \cdot t = m\,(v - v_0).$$

Verbinden wir hiemit die in § 112 verzeichnete Gleichung

$$s = \frac{1}{2}(v_o + v)\,t, \text{ so folgt}$$

$$(2)\quad P \cdot s = \frac{1}{2}m\,(v^2 - v_o^2).$$

Betrachten wir die Bewegung von der Ruhe aus, d. h. setzen wir $v_o = o$, so ergibt sich beziehungsweise

$$(3)\quad P \cdot t = mv$$

$$(4)\quad P \cdot s = \frac{1}{2}mv^2.$$

Die in (1) und (2) oder auch in (3) und (4) aufgestellten Gleichungen enthalten implicite alle bisher vorgetragenen Lehren der Dynamik und haben nicht bloß wegen ihres Ursprungs, sondern auch wegen ihrer vielseitigen Anwendbarkeit eine ganz besondere Bedeutung. Der Ausdruck mv heißt nach Galilei Quantität der Bewegung und gibt die Größe der Kraft für eine bestimmte Zeit; mv^2 heißt nach Leibnitz lebendige Kraft, $\frac{1}{2}mv^2$ nach Belanger lebendige Potenz und mißt die Kraft für einen gegebenen Weg; endlich heißt $P \cdot s$ nach Coriolis die Arbeit der Kraft. (Vergl. 148—51.)

§ 138. **Lehrsatz.** Haben zwei ungleiche Massen beständig gleiche Bewegung, so verhalten sich die bewegenden Kräfte wie die bewegten Massen.

Beweis. Werden die Massen m und m_1 von den Kräften P und P_1 in Bewegung gesetzt, so haben wir für dieselbe Zeit t nach § 137 (1)

$$Pt = m\,(v - v_o)$$

$$P_1t = m_1\,(v - v_o);\ \text{mithin}$$

$$P : P_1 = m : m_1.$$

§ 139. **Lehrsatz.** Werden zwei ungleiche Massen m, m_1 von gleichen Kräften von der Ruhe aus in Bewegung gesetzt, so verhalten sich die in gleichen Zeiten erlangten Geschwindigkeiten umgekehrt wie die Massen; oder mit andern Worten: eine konstante Kraft bringt in der kleineren Masse die größere Geschwindigkeit hervor.

Beweis. Wir haben in diesem Falle nach § 137 (3)

$$\frac{\begin{array}{l} Pt = mv \\ Pt = m_1 v_1; \text{ hieraus} \end{array}}{\begin{array}{l} mv = m_1 v_1, \text{ oder} \\ m : m_1 = v_1 : v. \end{array}}$$

§ 140. **Wirkungen der Schwere.** Vielfältige Versuche mit frei fallenden Körpern bestätigen folgende zwei Thatsachen:

1) Alle Körper fallen von gleichen Höhen mit gleicher Geschwindigkeit;
2) die Zunahme der Geschwindigkeit ist für gleiche Zeiten unveränderlich und stets proportional der Zeit.

Auf Grund dieser Thatsachen werden wir zu folgenden Schlüssen gezwungen:

1) die Anziehungskraft der Erde ist der Masse der fallenden Körper proportional nach § 138;
2) die Schwerkraft ist eine konstante Kraft nach § 124 und mithin gelten für frei fallende Körper die in § 110 bis § 116 entwickelten Bewegungsgesetze.

§ 141. **Beschleunigung der Schwere.** Die Beschleunigung, d. i. die Geschwindigkeit, welche ein frei fallender Körper von der Ruhe ausgehend am Ende der ersten Sekunde erreicht, wird allgemein mit g (gravitas) bezeichnet. Dieselbe ist im Allgemeinen veränderlich und nur an Orten unter demselben Breitegrad und in Höhen unter 100 Fuß gleich, kann aber für jeden Breitegrad der Erdoberfläche berechnet werden, wenn sie für einen Ort genau ermittelt ist. Nach Beobachtungen im luftleeren Raum wurde für Paris gefunden

$$g = 9{,}80896 \text{ Meter} = 33{,}608 \text{ b. Fuß}^*.$$

§ 142. **Fallgesetze.** Schreiben wir g anstatt a in den Gleichungen des § 111 und 113, so haben wir als Gesetze der Bewegung im freien Fall

---

* Die Fallbeschleunigung g ist mit der Masseneinheit g in § 71 der Größe nach identisch.

$$(1)\quad v = gt, \text{ oder } v = v_0 + gt$$
$$(2)\quad s = \tfrac{1}{2}gt^2, \text{ oder } s = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit $= o$, oder $= v_0$ ist. Durch Elimination von t folgt noch

$$(3)\quad v^2 = 2sg, \text{ oder } v^2 = v_0^2 + 2sg.$$

Durchläuft ein freier Punkt die Fallräume s und s_1 in den Zeiten t und t_1, jedesmal von der Ruhe ausgehend, so haben wir

$$s : s_1 = \tfrac{1}{2}gt^2 : \tfrac{1}{2}gt_1^2, \text{ oder}$$
$$(4)\quad s : s_1 = t^2 : t_1^2, \text{ d. h.}$$

die Fallräume verhalten sich, wie die Quadrate der Zeiten.

Für $t = 1$ folgt aus (2)

$$(5)\quad s = \tfrac{1}{2}g = 4{,}90448^m, \text{ d. h.}$$

so tief fällt jeder Körper während der ersten Sekunde.

§ 143. **Maaßeinheit der Kraft und Geschwindigkeit.** In der Statik haben wir gefunden, daß das Gewicht eines Körpers der Intensität gleich ist, mit welcher er von der Erde angezogen wird. Das Nämliche gilt für die Bewegung im freien Fall. Denn lassen wir die Masse m, deren Gewicht $= G$ sei, während 1 Sekunde frei herabfallen, so erreicht der Körper die Geschwindigkeit $v = g$, und wir haben einerseits

$$P = mg$$

als Quantität der Bewegung (§ 137); andrerseits nach § 71

$$mg = G;$$

mithin $P = G$. Die bewegende Kraft, welche von der Schwere herrührt, ist daher unter allen Umständen gleich dem Gewichte der angezogenen Masse. Aus diesen und anderen Gründen empfiehlt sich das Gewicht als das natürlichste Mittel, die Intensität der Kräfte überhaupt zu messen. Die Einheit des Gewichtes ist auch Einheit der Kraft; also $k = 1$ Kilogramm. Wählen wir noch den Meter als Maaßeinheit der Geschwindigkeit, setzen wir also $a = 1$ Meter, so haben wir ein ausreichendes Maaßsystem für alle Fragen der Mechanik. Im Sinne des § 113 ist nun auch $k = a$. Hinsichtlich der Massen-

einheit $g = 9{,}80896$ Km, welche zunächst von der Krafteinheit abhängig ist, entsteht die Frage, ob sie mit den übrigen Maaßeinheiten noch verträglich ist.

§ 144. **Maaßeinheit der Masse.** Bezeichnen wir das Gewicht der fraglichen Masse vorerst mit G, so muß es so beschaffen sein, daß ihm die Kraft $k = 1$ Km die Beschleunigung $a = 1^m$ mitteilt. In Berücksichtigung, daß $t = 1''$ ist, haben wir nach § 136 als allgemein giltig für jede Masse

$$a = \frac{P}{m} \text{ und } m = \frac{G}{g}; \text{ mithin } a = g \cdot \frac{P}{G}.$$

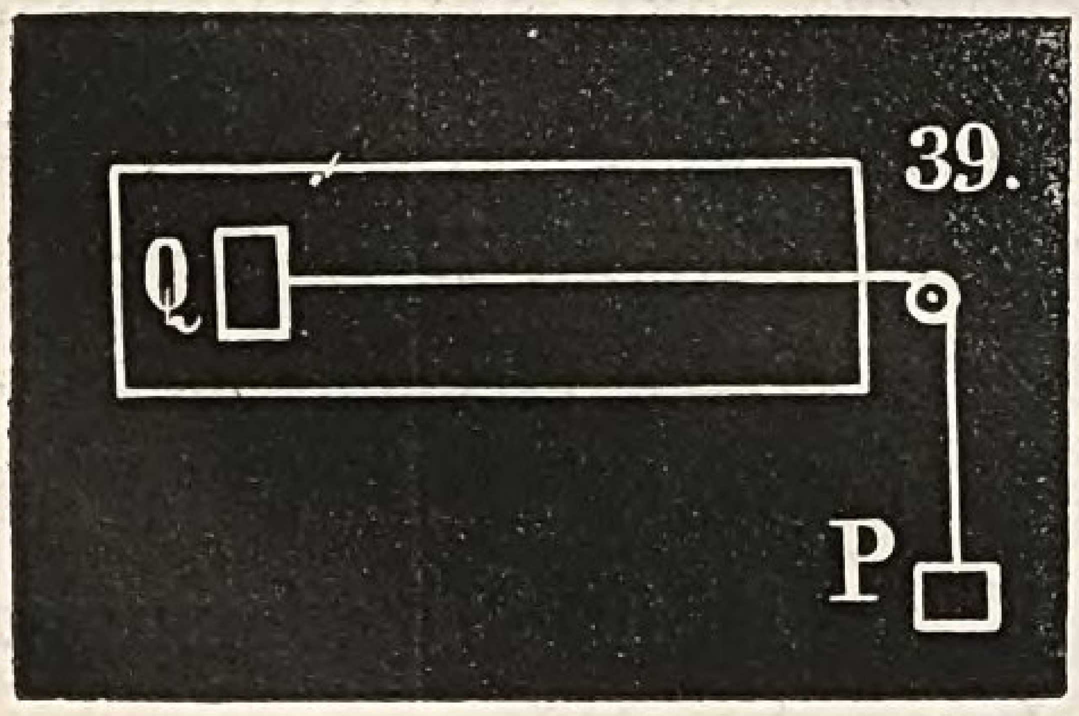
Weil aber $a = 1$ und $P = k = 1$ für die Masseneinheit gesetzt werden muß, so folgt hieraus

$$1 = \frac{g}{G}; \text{ oder } G = g^*$$

Die Masseneinheit ist demnach dieselbe wie früher.

§ 145. **Nachweis durch Versuche.** Die vorige Erörterung setzt voraus, daß es möglich sei, der Masseneinheit g eine Beschleunigung $a = 1^m$ mitzuteilen. Im freien Fall ist dies unmöglich, weil jeder Körper mit derselben Beschleunigung $a = g = 9{,}80896^m$ fällt. Dagegen kann diese Absicht durch mancherlei künstliche Mittel erreicht und zugleich die Richtigkeit der aufgestellten Lehrsätze erprobt werden.

I. Versuch. Auf einer horizontalen glatten Ebene (Fig. 39) befinde sich ein schwerer Körper von Q Kilogramm; über eine leicht bewegliche Rolle sei ein gewichtsloser Faden, welcher das freihängende Gewicht P mit Q verbindet, so geführt, daß der Teil zwischen Rolle und Q stets horizontal bleibt. Denken wir uns jeden Widerstand der Reibung aufgehoben, so muß unter allen



* Die Zahl $g = 9{,}80896$ hat in der Mechanik eine dreifache Bedeutung; 1) bedeutet g Kilogramm die Masseneinheit, 2) die beschleunigende Kraft der Schwere, 3) g Meter die Beschleunigung der Schwerkraft im freien Fall.

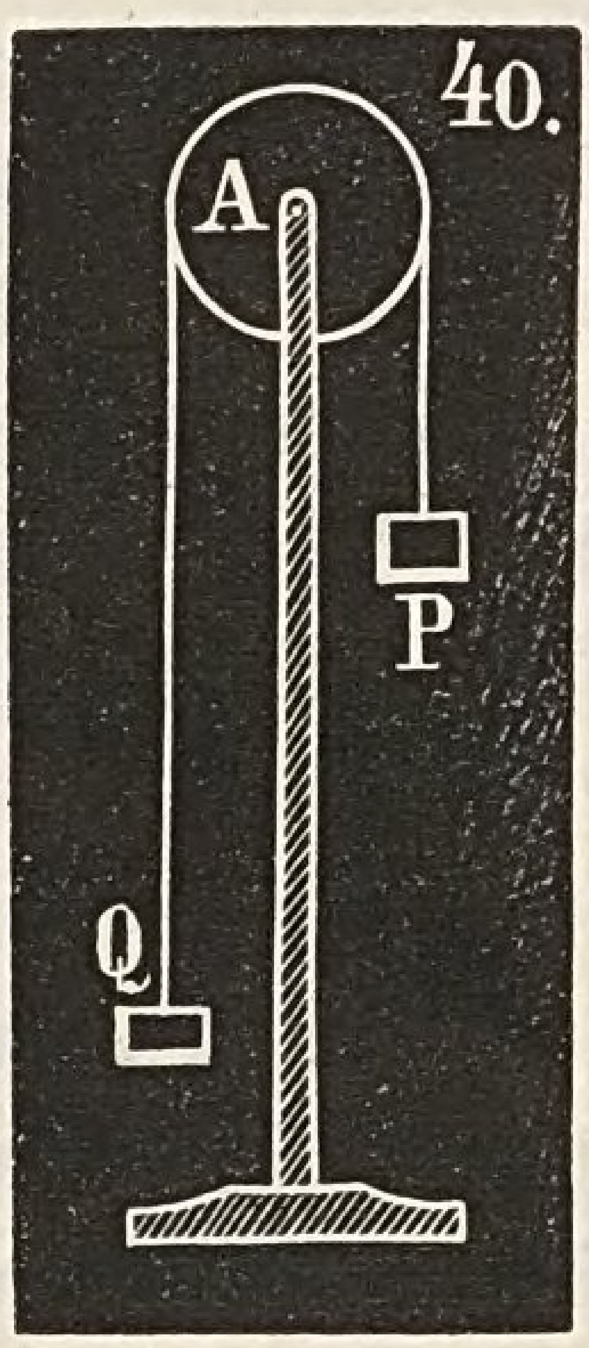
Umständen eine Bewegung eintreten. In diesem Zustande werden beide Körper von der Schwerkraft mit einer Intensität gleich ihren Gewichten angezogen. Die in Q thätige Kraft wird durch den Widerstand der Unterlage aufgehoben, so daß nur die Kraft in P allein übrig bleibt, die Massen von P und Q zusammen in Bewegung zu setzen. Nun ist aber nach § 136 die Beschleunigung

$$a = g \frac{P}{G}; \text{ mithin wegen } G = P + Q$$

$$(1)\ a = g \frac{P}{P + Q}; \text{ und } (2)\ s = \tfrac{1}{2} at^2 = \tfrac{1}{2} g \frac{P}{P + Q} t^2.$$

Den Weg, welchen Q in einer gegebenen Zeit t zurücklegt, kann man direkt der Beobachtung entnehmen und damit das Resultat der Rechnung vergleichen.

II. Versuch. Ueber eine leicht bewegliche vertikale Rolle in A (Fig. 40) sei ein gewichtsloser Faden geführt, welcher an seinen Enden die Gewichte P und Q trage. Im Falle kein Widerstand der Reibung stattfindet, werden beide Gewichte nur dann in Ruhe bleiben, wenn P = Q ist; in jedem andern Fall tritt Bewegung ein. Um nun hier a und s zu bestimmen, haben wir in P und Q Kräfte wirksam, welche den Gewichten gleich und in Beziehung auf den Drehungspunkt A einander entgegengesetzt sind. Nehmen wir P > Q, so ist ihre Resultante R = P — Q, welche Kraft die Masse beider Gewichte in Bewegung zu setzen hat. Wir haben daher G = P + Q als Gewicht der bewegten Masse und P* = R in der allgemeinen Formel des § 136 zu setzen wie oben und erhalten



$$(3)\ a = g \cdot \frac{R}{P + Q} = g \cdot \frac{P - Q}{P + Q}$$

und somit auch den in der Zeit t zurückgelegten Weg

* Das hier in Rede stehende P ist selbstverständlich von jenem in § 136 wesentlich verschieden.

(4) $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}g \frac{P - Q}{P + Q} t^2$.

Durch geschickte Wahl der Gewichte P und Q kann man jede Beschleunigung zwischen o und g hervorbringen und auf diese Weise die aufgestellten Bewegungsgesetze bis ins Einzelne erproben. Eine sorgfältig eingerichtete Maschine dieser Art ist die Atwood'sche Fallmaschine, deren Resultate mit den Ergebnissen der Formeln (3) und (4) zu vergleichen sind.

Als dritte Versuchsart bietet sich die Fallbewegung über eine schiefe Ebene dar. Durch Aenderung des Neigungswinkels erreicht der fallende Körper jedesmal eine andere Beschleunigung. Vergl. § 156.

§ 146. **Wirkung und Gegenwirkung.** Alle wahrnehmbaren terrestrischen Bewegungserscheinungen sehen wir mittelbar durch Körper hervorgebracht. Gleichwohl ist jeder materielle Körper an sich träg und unfähig, weder sich noch andere Körper ohne äußeren Impuls in Bewegung zu setzen. Das Wort Kraft, womit wir das außerhalb der Materie liegende agens bezeichnen, ist ein dunkler Ausdruck für die unbekannte Ursache, welche mechanische Erscheinungen hervorbringt, sich aber jeder näheren Wahrnehmung entzieht. Wir wissen nur soviel mit Gewißheit, daß Kraft ohne Materie wirkungslos ist, daß also beide unzertrennlich an einander gebunden gedacht werden müssen. Diese Wirkungsweise von Körper zu Körper offenbart sich als Zug oder Druck, der Effekt ist Bewegung, Stoß, Pressung, Spannung. In allen Fällen ist, wie die Erfahrung lehrt, die Wirkung eines Körpers A auf einen Körper B jener gleich, welche B auf A entgegenäußert, oder: Wirkung und Gegenwirkung sind gleich und entgegengesetzt.

Nach diesem Naturgesetze bringt jeder Druck einen gleichen Gegendruck, jeder Zug einen gleichen Gegenzug hervor, und es wirken dabei die Körper wie Kräfte, die einen agierend, die andern reagierend. Stoßen zwei Körper auf einander, so erleidet unter allen Umständen jeder Körper einen Stoß von gleicher Intensität; die Folgen des Stoßes sind jedoch bei jeder der

beiden Massen andere. Denken wir uns zwei Boote A und B mit ungleicher Belastung auf einem ruhigen See, in A eine Kraft, welche B gegen A zu ziehen strebt, so folgt nicht blos B allein dem Zuge, sondern es bewegen sich beide Boote gegen einander mit einer Geschwindigkeit $v \gtreqless v_1$, welche ihrer Belastung entspricht. Dasselbe gilt vom Stoße. Darin finden wir auch den Erklärungsgrund für die Thatsache, daß alle Körper gleich schnell fallen. Denn nach dem Anziehungsgesetze

$$P = q \cdot \frac{mM}{r^2} \ (\S\ 71)$$

drückt P nicht bloß die Intensität aus, mit welcher die Erdmasse M die des fallenden Körpers m anzieht, sondern auch jene, mit welcher die Erde vom fallenden Körper angezogen wird. Sind nun g und g′ die Beschleunigung von m und M, so folgt § 136

$$g = \frac{P}{m} = \frac{qM}{r^2}; \ g' = \frac{P}{M} = \frac{qm}{r^2},$$

woraus wir erkennen, daß $\frac{qM}{r^2}$ also auch g von m unabhängig und für alle fallenden Körper konstant ist, und daß g′ um so mehr sich der Null nähert, je größer M im Verhältniß zu m ist, so daß wir von einer Bewegung der Erde gegen den fallenden Körper nichts wahrnehmen können.

§ 147. **Gravitationsgesetz.** Das Gesetz von der Gleichheit zwischen Wirkung und Gegenwirkung findet auch noch Anwendung auf die Himmelskörper. So wird z. B. die Erde vom Mond mit derselben Intensität angezogen, mit welcher umgekehrt die Erde den Mond anzieht. Sind M und m die Massen zweier Himmelskörper, r ihr Abstand, so ist der Ausdruck für die Größe der gegenseitigen Anziehung wie vorhin

$$P = q \frac{mM}{r^2} \text{ d. h.}$$

alle materiellen Körper ziehen sich mit einer Intensität an, welche den Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

§ 148. **Arbeit der Kraft.** Seit man angefangen hat, die Arbeitskräfte der Menschen und Tiere durch Maschinen zu ersetzen, hat man den dem gewöhnlichen Sprachgebrauch entlehnten Ausdruck Arbeit auch auf mechanische Kräfte übertragen und versteht fast allgemein unter Arbeit oder Leistung einer Kraft das Produkt aus Kraft in den Weg, welchen der Angriffspunkt an der zu bewegenden Last in der Richtung der Kraft zurückgelegt hat. Bezeichnen wir die geleistete Arbeit mit A, so ist dem zufolge

$$(1) \quad A = P \cdot s,$$

wobei der Weg s sowohl gerad= als krummlinig sein kann.

Die Leistung einer Kraft besteht also darin, die Masse der Last eine Strecke = s fortzubewegen. Es ergibt sich hieraus ganz von selbst, daß eine Kraft, deren Richtung zu der von s senkrecht ist, keine Arbeit verrichten kann. Macht die Richtung der Kraft P mit s einen Winkel = φ und zerlegen wir P in die Komponenten P cos φ und P sin φ, so verrichtet nur P cos φ Arbeit, während die zu s senkrechte Komponente P sin φ hiefür verloren geht. Die geleistete Arbeit ist daher in diesem Falle

$$(2) \quad A = Ps \cdot \cos \varphi.$$

Ist $\varphi > 90$, so wird A negativ. Aus diesem Grunde können Kräfte sowohl positive als auch negative Arbeit verrichten.

Sollen zwei verschiedene Kräfte P und P_1 äquivalente Arbeiten verrichten, so ist notwendig

$$(3) \quad Ps = P_1 s_1,$$

welche Gleichung dazu dient, die Arbeiten der Kräfte wie einfache Kräftemomente an einem Hebelarm auf beliebige Angriffspunkte zu reduzieren.

§ 149. **Mechanische Arbeit an einem freien Punkte.** Wird ein freier Punkt von der Masse m von einer konstanten Kraft P während der Zeit t in Bewegung gesetzt, so ist in diesem Falle die Größe der mechanischen Arbeit in Rücksicht auf § 137 ausgedrückt durch

$$(1) \quad A = Ps = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0{}^2$$

d. h. bei der geradlinigen Bewegung eines freien materiellen

Punktes ist die von der bewegenden Kraft innerhalb irgend einer Zeit verrichtete Arbeit gleich dem halben Zuwachs an lebendiger Kraft, welche die bewegte Masse während dieser Zeit erhalten hat. Geht die Bewegung von der Ruhe aus, ist also $v_o = 0$, so ist der Ausdruck der mechanischen Arbeit der Kraft

$$(2) \quad A = \tfrac{1}{2} mv^2.$$

Anm. Die Leistung der Kraft ist hier keine Arbeit im gewöhnlichen Sinne, weil nach dem Prinzipe der Trägheit die geringste Kraft hinreicht, durch einmalige Wirkung den Punkt dauernd in Bewegung zu versetzen; dieselbe besteht ausschließlich in Ueberwindung der Trägheit und erscheint als Anhäufung von lebendiger Kraft. Sobald die Kraft P zu wirken aufhört, bewegt sich der Punkt gleichförmig fort und kommt nicht eher zur Ruhe, als bis er die angesammelte lebendige Kraft vollständig an andere Körper abgegeben hat, wodurch er seinerseits wiederum mechanische Arbeit verrichtet, oder die empfangene lebendige Kraft in Arbeit umsetzt. Je größer die lebendige Kraft, desto intensiver ist auch die Wucht oder Energie, mit welcher der Punkt auf andere einwirkt.

§ 150. **Mechanische Arbeit der Maschinen.** Zweck einer jeden Maschine ist, eine nutzbringende Arbeit zu verrichten durch Ziehen, Schieben und Heben von Lasten. Sei P die an der Maschine arbeitende Kraft (Motor), m die zu bewegende und im Angriffspunkt vereinigte Masse, R die Summe aller Widerstände, welche als reagierende Kraft eine negative Arbeit verrichtet und denselben Weg s, den P zurücklegt, machen soll, so ist, solange die Bewegung in der Richtung von P erfolgt, P -- R diejenige Kraft, welche die Masse m wie einen freien Punkt in eine beschleunigte Bewegung versetzt, folglich für irgend eine Dauer

$$(P - R)\, s = \tfrac{1}{2} m\, (v^2 - v_o^2).$$

Hieraus ergibt sich als Arbeit der Kraft P

$$(1) \quad A = Ps = Rs + \tfrac{1}{2} m\, (v^2 - v_o^2).$$

Die Arbeit der Kraft besteht hier im Ueberwinden der Widerstände R, was Arbeit im gewöhnlichen Sinne, und im Anhäufen von lebendiger Kraft, was an sich keine Nutzbarkeit ist. Dieses letztere dauert so lange, als $P > R$ ist. Allein die Erhaltung dieses Zustandes ist weder wünschenswert, noch auch auf die Dauer möglich, es tritt vielmehr bei jeder Maschine sehr

bald der so genannte Beharrungszustand d. i. gleichförmiger Gang der Maschine ein. In diesem Falle ist $P = R$, folglich $v = v_o$ und somit

$$(2)\quad A = Ps = Rs$$

die alleinige Arbeit der Kraft, und die Maschine bleibt in Folge des Beharrungsvermögens allein in gleichförmigem Gange. Die widerstehende Kraft R setzt sich bei jeder Maschine aus zweierlei Widerständen zusammen, nämlich aus dem Widerstande R_1 der zu bewegenden Masse (Nutzlast) und aus den Reibungswiderständen R_2 der Maschinenteile. Das Ueberwinden von R_1 ist Nutzarbeit, das Ueberwinden von R_2 ist verlorne oder Nebenarbeit. Da nun im Allgemeinen R_1 und R_2 andere Wege beschreiben als P, so haben wir als Totalarbeit einer Maschine im Beharrungszustande

$$(3)\quad A = Ps = R_1 s_1 + R_2 s_2$$

wenn s_1 und s_2 die Wege der widerstehenden Kräfte R_1 und R_2 bezeichnen. Die Güte einer Maschine wird aus dem Verhältnisse der Nutzarbeit zur Totalarbeit beurteilt, und man nennt dieses Verhältniß relative Arbeit oder Wirkungsgrad der Maschine. Vergl. § 179.

Ist endlich $P = o$ geworden, so wird der Gang der Maschine allmälig langsamer und schließlich in Ruhe übergehen, sobald die angehäufte lebendige Kraft verbraucht ist, d. h. sobald

$$(4)\quad \tfrac{1}{2} mv^2 = Qs$$

geworden ist. Von diesem Augenblicke ($P = o$) an besteht die von der lebendigen Kraft verrichtete Arbeit im Ueberwinden aller Widerstände auf die Strecke s.

Die Güte und Brauchbarkeit einer Maschine verlangt, wie schon bemerkt, gleichförmigen Gang; deßhalb ist in der Technik der Fall $P = R$ allein von entscheidender Wichtigkeit. Aus diesem Grunde werden leichte Maschinen überall, wo es geschehen kann, absichtlich durch Schwungräder u. dgl. mit soviel Masse versehen, daß durch eine entsprechende angesammelte lebendige Kraft, soviel als möglich, ein regelmäßiger Gang erzielt wird.

§ 151. **Maaß der mechanischen Arbeit.** Einen sicheren Maaßstab für die Leistungen der verschiedenen arbeitenden Kräfte aufzustellen, ist im Allgemeinen mit großen Schwierigkeiten verbunden. Sehen wir jedoch von der Qualität der Arbeit ab und betrachten wir nur Arbeiten, welche im Bewegen von Massen und Ueberwinden von äquivalenten Widerständen bestehen, so bietet uns das lotrechte Heben von Lasten einen ausreichenden Maaßstab. Wollen wir ferner die Leistungen verschiedener Kräfte vergleichen, so ist es nicht genug, die Größe oder Quantität der Arbeit an sich zu kennen, sondern wir müssen auch die Zeit berücksichtigen, in der die Arbeit verrichtet wurde. Man ist überein gekommen, als Arbeitseinheit jene Arbeit zu nehmen, welche erforderlich ist, die Gewichtseinheit (Kilogramm) in 1 Sekunde auf eine Höhe gleich der Längeneinheit (Meter) zu heben. Nach diesem Maaßsystem heißt die Arbeitseinheit Kilogrammmeter oder Meterkilogramm; 75 Meterkilogramm bilden eine höhere Einheit, nämlich eine Pferdekraft*. Wird nun eine Last = Q Kilogramm in der Zeit t auf eine Höhe = h Meter gehoben, so ist die geleistete Arbeit dem Q und h proportional; daher die Arbeit einer Sekunde

$$A = \frac{Q \cdot h}{t} \text{ Meterk.} = \frac{Qh}{75\,t} \text{ Pferdekräfte,}$$

und die Totalarbeit während der Zeit t

$$A = Q \cdot h \text{ Meterk.} = \frac{Qh}{75} \text{ Pferdekräfte.}$$

Alle mechanischen Kräfte, welche Massen bewegen, lassen sich sowohl der Größe, als auch mittelst Leitrollen der Richtung nach durch Gewichte ersetzen. Darin ist auch der Grund zu suchen, warum unser Arbeitsmaaß auf alle mechanische Leistungen anwendbar ist. Denn wird z. B. über eine schiefene Ebene von der Neigung α, Länge s und Höhe h eine Last Q von einer zur schiefen Ebene parallelen Kraft P aufwärts gezogen, so ist

---

* In England ist eine Pferdekraft = 550 Fußpfund, in Oesterreich = 430 Fußpfund.

$$P = Q \sin \alpha \text{ und } s \cdot \sin \alpha = h; \text{ folglich}$$

$$P \cdot s = Q \cdot h$$

Ist allgemein Q das Gewicht der bewegten Masse m, Q' ein Gewicht, welches die Kraft zu ersetzen vermag, h die Fallhöhe desselben während der stattgehabten Bewegung, so ist, wie später in § 160 bewiesen wird, unter allen Umständen

$$v^2 - v_0^2 = 2gh.$$

Vermöge dieses Wertes geht die frühere Gleichung

$$Ps = \tfrac{1}{2} m (v^2 - v_0^2) \text{ über in}$$

$$Ps = mgh = Qh$$

d. h. das Produkt Ps, welches die Arbeit der Kraft P ausdrückt, ist in allen Fällen einer entsprechenden Höhenarbeit Qh äquivalent.

§ 152. **Spannung.** Wird eine Last Q, worunter wir der Einfachheit wegen auch alle Widerstände mit inbegreifen, von einer Kraft P nicht direkt, sondern durch Vermittlung eines Zwischenkörpers (Faden, Schnur, Seil u. s. w. angegriffen und in Bewegung gesetzt, so erleidet dieser Zwischenkörper in jedem Falle eine Spannung oder Pressung S, welche in allen Punkten dieselbe und der Kraft P gleich ist. Im Zustand des Gleichgewichts und der gleichförmigen Bewegung ist P = Q; mithin

$$(1) \quad S = Q.$$

Ist aber die Bewegung beschleunigt, so ist notwendig $P \gtreqless Q$, also auch $S \gtreqless Q$. Setzen wir die Beschleunigung $= \pm a$, so haben wir nach § 136 $P - Q = \pm ma$; folglich

$$(2) \quad S = Q \pm ma.$$

Ist endlich die Bewegung frei von Widerständen, so ist $mg = Q$ zu setzen; mithin in solchen Fällen

$$(3) \quad S = Q\left(1 \pm \frac{a}{g}\right)$$

je nachdem $P > Q$, oder $P < Q$ ist. Für die Atwood'sche Fallmaschine ergibt sich hiernach als Spannung entweder

$$S = Q\left(1 + \frac{P - Q}{P + Q}\right) = \frac{2PQ}{P + Q}, \text{ oder}$$

$$S = P\left(1 - \frac{P - Q}{P + Q}\right) = \frac{2PQ}{P + Q}.$$

§ 153. **Trägheitsmoment.** Der in den vorausgehenden Paragraphen aufgestellte Ausdruck für die Größe einer mechanischen Arbeit findet bei jeder Bewegungsart eines schweren Körpers, also auch bei der rotierenden und schwingenden Bewegung Anwendung. Sei nun m die Masse eines Punktes, der von einer Kraft P um eine feste Achse in einer konstanten Entfernung = r in drehende Bewegung versetzt wird, R der zu überwindende und auf den Angriffspunkt von P reduzierte Widerstand § 148 (3), so ist P — R die bewegende Kraft, folglich ihre Arbeit*

$$A = (P - R)\, s = \tfrac{1}{2} m\, (v^2 - v_o^2).$$

Setzen wir hierin nach § 119 $s = r\varphi$, $v = r\omega$, so wird

$$(1)\quad A = (P - R)\, r\varphi, \text{ oder auch}$$

$$(2)\quad A = \tfrac{1}{2} mr^2\, (\omega^2 - \omega_o^2) = mr^2\, \alpha\varphi.$$

Lassen wir anstatt des Punktes einen Körper rotieren, so bleiben für alle seine Massenteilchen α, ω, φ dieselben Größen; der Betrag der respektiven Arbeit ändert sich daher nur mit dem Produkte mr^2. Dieses Produkt aus der Masse und dem Quadrate der Entfernung von der Drehachse heißt in der Mechanik allgemein das Trägheitsmoment des Punktes in Beziehung auf die Drehachse. Durch Verrücken des Punktes m kann man das Trägheismoment desselben nach Belieben größer und kleiner machen. Haben zwei Punkte m und m_1 gleiche Trägheitsmomente, so ist notwendig

$$(3)\quad mr^2 = m_1 r_1^2$$

und es kann jeder Punkt den andern ersetzen, ohne die Bewegung im geringsten zu ändern. Rotieren oder schwingen zwei Punkte gleichzeitig um dieselbe Achse, so kann man ihre Massen m und m_1 in eine Entfernung y bringen, so daß beide wie ein einzelner

---

* Man unterscheide bewegende Kraft P — R von der gegebenen Kraft P, deren Arbeit natürlich eine andere ist.

Punkt von der Masse $m + m_1$ rotieren oder schwingen, ohne die Rotationsbeschleunigung zu ändern. Dieses findet offenbar statt, wenn die Bedingung

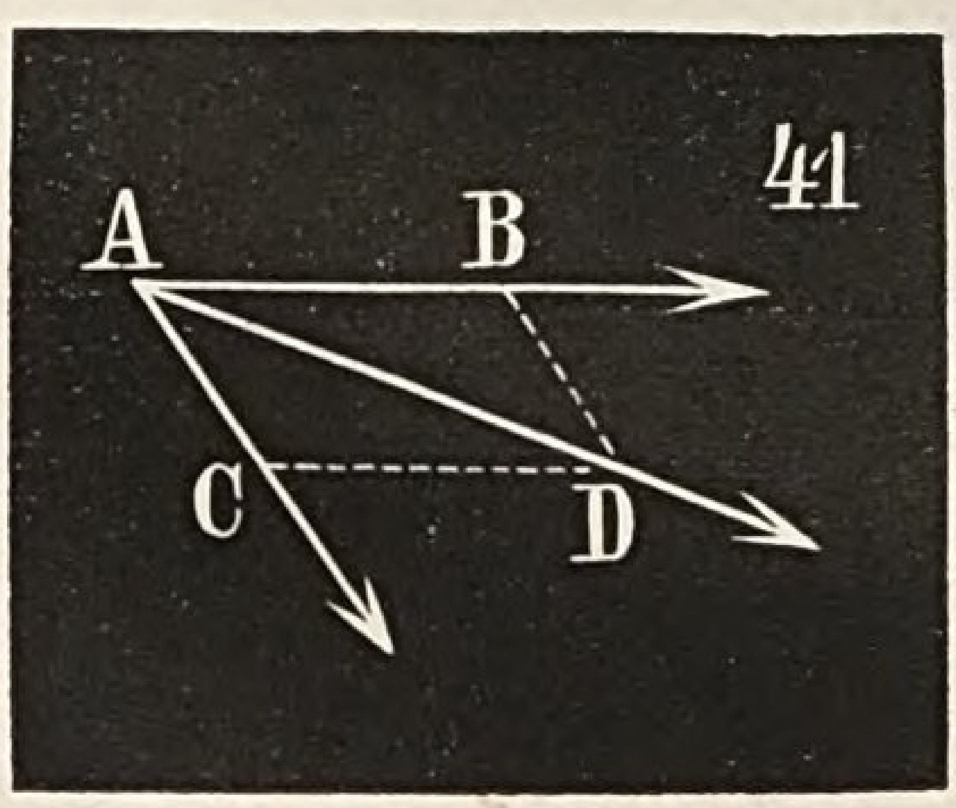
$$mr^2 + m_1r_1^2 = (m + m_1)\, y^2$$

erfüllt ist. Dehnt man dies auf alle Punkte eines Körpers aus, so läßt sich auf diese Weise eine Stelle von solcher Beschaffenheit angeben, daß die Bewegung dieselbe bleibt, wenn man die Gesammtmasse des Körpers in diesem Punkte konzentriert denkt. Dieser Punkt heißt Schwingungs- oder Drehungsmittelpunkt des Körpers und ist im Allgemeinen vom Schwerpunkt verschieden, und die Entfernung y Schwingungs- oder Drehungshalbmesser.

Drittes Kapitel.

Beispiele von Bewegungen.

§ 154. **Geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.** Ein Punkt A werde von zwei Kräften gleichzeitig in Bewegung gesetzt und zwar von der einen mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 und von der anderen mit v_1*. In diesem Falle ist nach § 125 unter allen Umständen die Bahn geradlinig und die Bewegung gleichförmig. Wirken die Kräfte unter einem Winkel α und ist (Fig. 41) $AB = v_0$, $AC = v_1$, so bewegt sich der Punkt in der Diagonale AD des aus v_0, v_1 und α konstruierten Parallelogramms ABCD mit einer Geschwindigkeit



$$(1)\quad v = AD = \sqrt{v_0^2 + v_1^2 + 2v_0v_1 \cos\alpha}$$

und beschreibt in der Zeit t einen Weg

$$(2)\quad s = vt.$$

---

* Solche Kräfte sind z. B. die Druckkraft des Wassers, die Zugkraft der Tiere und Menschen u. d. gl.

Fallen AB und AC in eine Gerade zusammen, so ist entweder $\alpha = o$, oder $\alpha = 180^0$; mithin

$v = v_0 + v_1$, oder $v = v_0 - v_1$; also

(3) $s = (v_0 \pm v_1)\, t$.

§ 155. **Geradlinig beschleunigte Bewegung.** Setzt die konstante Kraft P einen freien Punkt von der Masse m in Bewegung, so ist Beschleunigung, Geschwindigkeit und Weg durch

$$a_1 = \frac{P}{m};\; v_1 = \frac{P}{m} t;\; s_1 = \tfrac{1}{2} \frac{P}{m} t^2$$

ausgedrückt. Analog haben wir für eine zweite Kraft Q und dieselbe Masse m und Zeit t

$$a_2 = \frac{Q}{m};\; v_2 = \frac{Q}{m} t;\; s_2 = \tfrac{1}{2} \frac{Q}{m} t^2.$$

Lassen wir beide Kräfte zugleich und in derselben Geraden auf m wirken, so wird der Punkt von ihrer Resultante $R = P \pm Q$ mit einer Beschleunigung

$$(1)\quad a = \frac{P \pm Q}{m} = \frac{P}{m} \pm \frac{Q}{m}$$

zu einer geradlinigen Bewegung angetrieben und wir haben als Ausdruck der Geschwindigkeit und des Weges für die Zeit t

$$(2)\quad v = \frac{P \pm Q}{m} t = \frac{P}{m} t \pm \frac{Q}{m} t;$$

$$(3)\quad s = \tfrac{1}{2} \frac{P \pm Q}{m} t^2 = \tfrac{1}{2} \frac{P}{m} t^2 \pm \tfrac{1}{2} \frac{Q}{m} t^2.$$

Mit Rücksicht auf das Vorausgehende haben wir

$$(4)\quad \left\{ \begin{array}{l} a = a_1 \pm a_2 \\ v = v_1 \pm v_2 \\ s = s_1 \pm s_2, \end{array} \right.$$ d. h.

bei jeder geradlinigen Bewegung ist Geschwindigkeit und Weg gleich der algebraischen Summe der Geschwindigkeiten und Wege, welche jede Kraft einzeln hervorbringt. Vergl. § 120.

Ist z. B. bei der Bewegung eines Eisenbahnzuges P die Dampfkraft der Maschine, R der zu überwindende Widerstand und m die Gesammtmasse des Zuges, so ist P — R diejenige

Kraft, welche den Zug wie einen freien Punkt in Bewegung setzt. Wir haben daher als Bewegungsgleichungen

$$(P - R)\,s = \tfrac{1}{2} m\,(v^2 - v_0^2), \text{ so lange } P > R$$

$$Ps = Rs, \text{ wenn } P = R \text{ und}$$

$$(5)\quad Rs = \tfrac{1}{2} m v_1^2, \text{ wenn } P = 0,$$

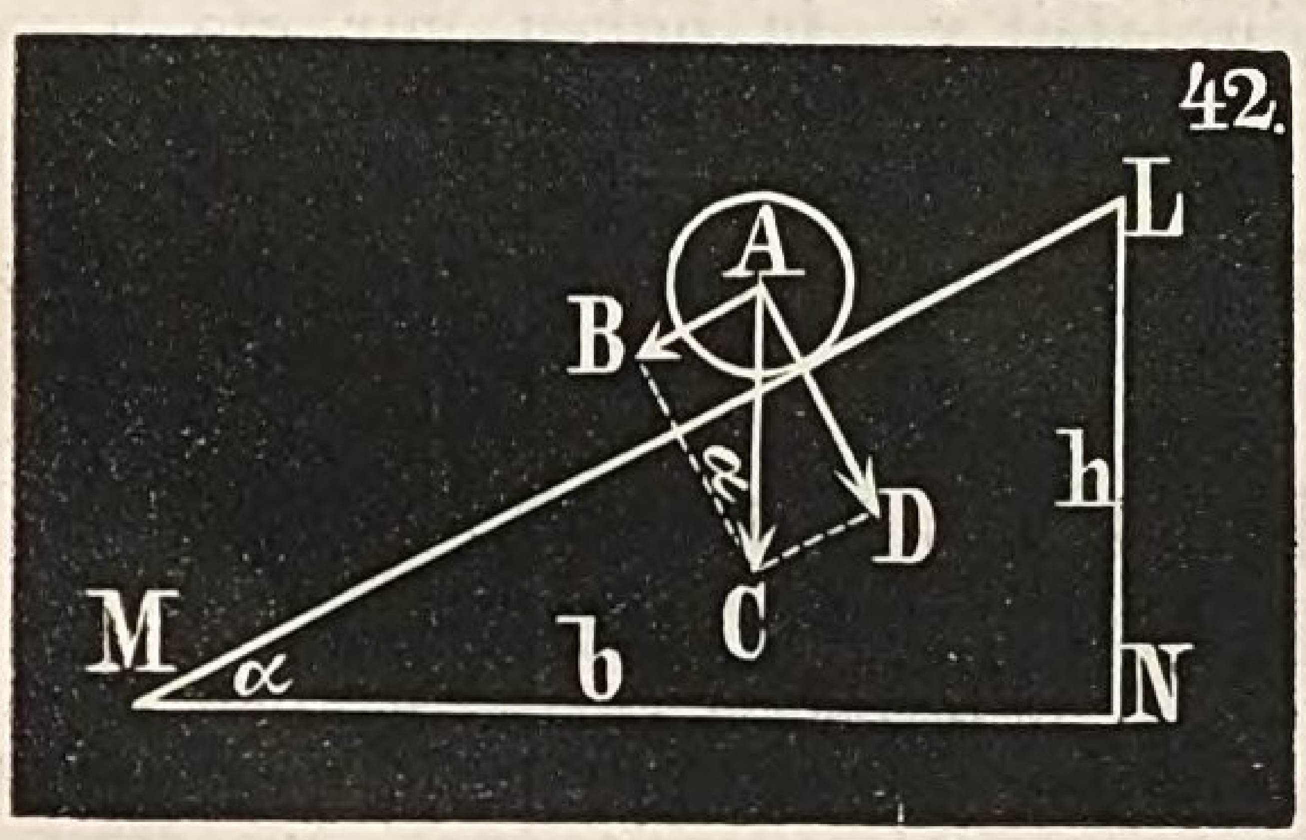
v_1 die erlangte Geschwindigkeit und s den von da bis zum Stillstand zurückgelegten Weg bezeichnet. Andrerseits haben wir für diesen letzteren Fall nach Gl. (2) für die abnehmende Geschwindigkeit v des Zuges

$$v = v_1 - v_2 = v_1 - \frac{R}{m} t \text{ oder}$$

$$(6)\quad Rt = m v_1$$

wenn $v = 0$ geworden ist. Sind m, R und v_1 gegeben, so kann man s aus (5) und t aus (6) berechnen. Uebrigens kann man auch (6) direkt aus (5) und umgekehrt (5) aus (6) vermöge der Gleichung $s = \tfrac{1}{2} v_1 t$ ableiten. Vergl. § 137.

§ 156. **Fallbewegung über eine schiefe Ebene.** Befindet sich ein schwerer Punkt vom Gewichte Q in A auf der schiefen Ebene LM (Fig. 42), deren Neigung $= \alpha$, so ist er der Wirkung der Schwerkraft unterworfen, welche ihn in der vertikalen Richtung AC mit einer Intensität $= Q$ zu bewegen strebt. Zerlegen wir AC in die rechtwinkeligen Komponenten AB und AD, so übt AD nur Druck auf LM aus, welcher von der schiefen Ebene aufgehoben wird, während die Komponente $AB = Q \sin\alpha$ allein den Punkt mit einer konstanten Beschleunigung längs LM wie einen freien Punkt in Bewegung setzt. Setzen wir in der allgemein giltigen Gleichung



$$a = g \frac{P}{Q}$$

$Q \sin\alpha$ an die Stelle von P, so erhalten wir

$$(1)\quad a = g \frac{Q \sin\alpha}{Q} = g \sin\alpha, \text{ d. h.}$$

die Beschleunigung ist unabhängig vom Gewichte Q und ändert sich in gleichem Sinne mit α. (Vergl. 146). Aus der Beschleunigung ergibt sich weiter

$$(2) \quad v = at = gt \sin \alpha,$$

$$(3) \quad s = \tfrac{1}{2}at^2 = \tfrac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

Befindet sich der Punkt in L, so ist s = LM zu nehmen.

Bezeichnen wir wie bisher die Höhe mit h und beachten die Relation LM $\sin \alpha = h$, so ergibt sich aus (2) und (3) durch Elimination von t

$$(4) \quad v = \sqrt{2gh} \text{ d. h.}$$

die Endgeschwindigkeit ist nicht von der Länge s, sondern nur von der Höhe h abhängig. Endlich ist noch, wenn wir s durch h ausdrücken,

$$(5) \quad h = \tfrac{1}{2}gt^2 \sin^2 \alpha.$$

§ 167. Zusatz. Hat der Punkt während seiner Bewegung über die schiefe Ebene an einer Stelle, welche der Zeit t = o entspricht, die Geschwindigkeit v_o, so haben wir als Ausdruck der Geschwindigkeit v und des von da an zurückgelegten Weges nach § 111 und 113 für eine beliebige Zeitdauer t beziehungsweise

$$(1) \quad v = v_o + gt \sin \alpha, \text{ und}$$

$$(2) \quad s = v_o t + \tfrac{1}{2}gt^2 \sin \alpha.$$

Ist der Punkt, wie z. B. durch eine Wurfkraft gezwungen, mit der Anfangsgeschwindigkeit v_o sich geradlinig aufwärts zu bewegen, so haben wir analog

$$(3) \quad v = v_o - gt \sin \alpha$$

$$(4) \quad s = v_o t - \tfrac{1}{2}gt^2 \sin \alpha. \text{ Vgl. § 155 (4).}$$

Der Punkt hört zu steigen auf, wenn v = o, oder was dasselbe ist, $gt \sin \alpha = v_o$ geworden ist; der zurückgelegte Weg beträgt für diesen Fall

$$s = \frac{v_o^2}{g \sin \alpha} - \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g \sin \alpha} = \frac{1}{2}\frac{v_o^2}{g \sin \alpha}.$$

Von da wird der Punkt rückläufig und kehrt in derselben

Zeit zu seinem Ausgangspunkt zurück. Durch Elimination von t erhalten wir für beide Fälle beziehungsweise noch

$$(5)\quad v^2 = v_o^2 \pm 2sg \sin\alpha$$

oder wegen $s \cdot \sin\alpha = h$ auch

$$(6)\quad v^2 = v_o^2 \pm 2gh.$$

§ 158. Zusatz. Bewegt sich ein Punkt über zwei zusammenhängende schiefe Ebenen von verschiedener Neigung α und β, und ist v_o die momentane Geschwindigkeit beim Uebergange von der ersten Ebene auf die zweite, so ist $\alpha - \beta$ der Neigungswinkel beider Ebenen gegen einander, $v_o \cos(\alpha - \beta)$ die Komponente, welche mit der Richtung der zweiten Ebene zusammenfällt und somit allein auf die zweite Bewegung Einfluß hat, während die senkrechte Komponente $v_o \sin(\alpha - \beta)$ für die Bewegung verloren geht. Verstehen wir unter t die Dauer der Bewegung, welche auf der zweiten Ebene von der Länge s und der Neigung β vor sich geht, so haben wir hiefür nach dem vorausgehenden Zusatz die Gleichungen

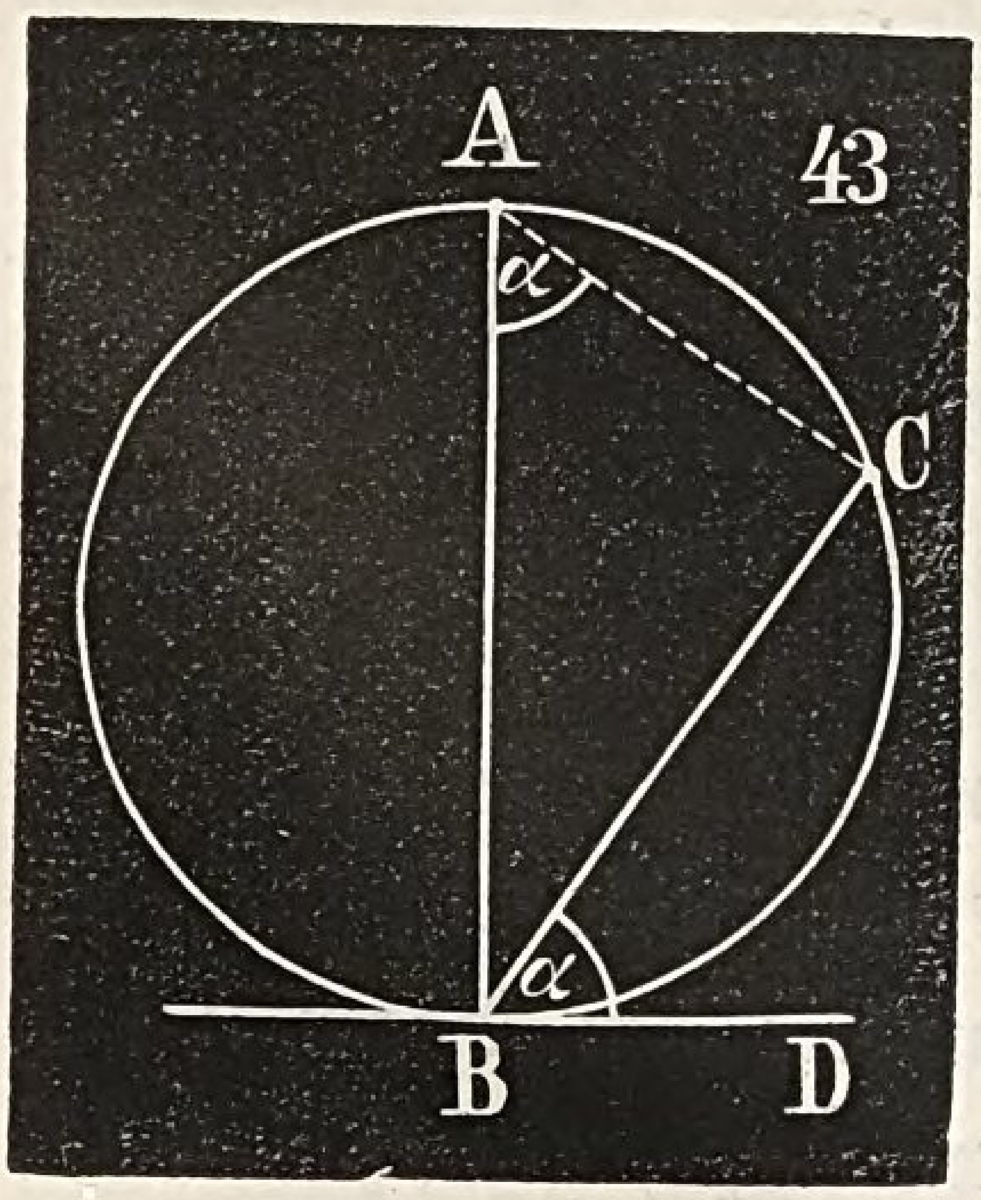
$$(1)\quad v = v_o \cos(\alpha - \beta) \pm gt \sin\beta,$$

$$(2)\quad s = v_o t \cos(\alpha - \beta) \pm \tfrac{1}{2} gt^2 \sin\beta,$$

$$(3)\quad v^2 = v_o^2 \cos^2(\alpha - \beta) \pm 2sg \sin\beta,$$

je nachdem die Bewegung abwärts oder aufwärts gerichtet ist Ist die zweite Ebene horizontal, so ist $\beta = o$ zu setzen.

§ 159. Zusatz. Zieht man in einem vertikalen Kreise nach dem tiefsten Punkte B (Fig. 43) eine Sehne CB, welche mit der Tangente BD einen Winkel $= \alpha$ bildet, so kann man CB als schiefe Ebene und α als ihre Neigung betrachten. Ziehen wir noch den Durchmesser AB und die Sehne AC, so ist



$\angle\, BAC = \angle\, CBC = \alpha$ und

$$BC = AB \sin\alpha = 2r \sin\alpha = s.$$

Wir haben daher nach (3) § 156 für einen beweglichen Punkt, der die Sehne CB durchläuft

$$2r \sin\alpha = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin\alpha, \text{ oder}$$

$$(1)\quad t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Setzen wir diesen Wert für t in die Gl. (2) § 156, so erhalten wir noch

$$(2)\quad v = 2\sqrt{rg} \cdot \sin\alpha.$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt: Der Punkt durchläuft jede Sehne in derselben Zeit, aber mit verschiedener Geschwindigkeit, und zwar nimmt v mit α ab und zu und erreicht seinen größten Wert $v = 2\sqrt{rg}$, wenn $\alpha = 90^0$, oder wenn der Punkt im vertikalen Durchmesser AB herabfällt. Führen wir noch in Gl. (2) vermöge der Relation $h = BC \sin\alpha = 2r \sin^2\alpha$ den vertikalen Abstand h der Punkte B und C, d. i. die Fallhöhe ein, so erhalten wir noch wie in (4) § 156

$$(3)\quad v = \sqrt{2gh}.$$

Der Punkt durchläuft aber auch jede von A aus gezogene Sehne in der nämlichen Zeit. Denn in Beziehung auf AC ist $2r \cos\alpha = \frac{1}{2} g t^2 \cos\alpha$, mithin $t = 2\sqrt{\frac{r}{g}}$, was von jeder anderen Sehne gleichfalls gilt.

§ 160. Zusatz. Ist s ein so kleiner Bogen einer beliebigen Kurve in einer vertikalen Ebene, daß die Sehne gleich dem Bogen gesetzt werden darf, so dürfen wir ohne merklichen Fehler in den Gleichungen des § 157 $\alpha - \beta = o$, oder $\alpha = \beta$ setzen, wodurch wir aus Gl. (3) erhalten

$$(1)\quad v^2 = v_o^2 \pm 2sg \sin\alpha;$$

ist ferner h der lotrechte Abstand der Endpunkte A und B des sehr kleinen Bogens s und somit $s \cdot \sin\alpha = h$, so folgt noch

$$(2)\quad v^2 = v_o^2 \pm 2gh,$$

worin v_o die Anfangsgeschwindigkeit in A und v die Endgeschwindigkeit in B bezeichnet.

Sei nun AB ein Bogenstück von beliebiger Größe, h der vertikale Abstand der Endpunkte, v_o und v die respektive Geschwindigkeit in A und B, so können wir den Bogen AB in so viele Stücke teilen, daß auf jeden einzelnen Teil Gl. (2)

anwendbar ist. Führen wir die Teilung so aus, daß die Höhendifferenzen oder vertikalen Abstände der aufeinander folgenden Teilpunkte sämmtlich $= h' = \frac{h}{n}$ werden, und sind v_o, v_1, v_2, v_3 ..... v_{n-1}, v beziehungsweise die an diesen Stellen stattfindenden Geschwindigkeiten, so haben wir

$$v_1^2 = v_o^2 + 2gh'$$
$$v_2^2 = v_1^2 + 2gh'$$
$$v_3^2 = v_2^2 + 2gh,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$v^2 = v_{n-1}^2 + 2gh'$$
$$\overline{v^2 = v_o^2 + n.2gh'}$$

oder weil der Voraussetzung zufolge $nh' = h$

$$(3)\quad v^2 = v_o^2 + 2gh,$$

worin auch $v_o = o$ sein kann. Fassen wir das in den letzten fünf Paragraphen Gesagte zusammen, so ergibt sich folgender merkwürdige Satz:

Bewegt sich ein Punkt unter dem alleinigen Einfluß der Schwerkraft von A nach B, so kommt er durch alle Kurven, welche durch A und B gelegt werden können, stets mit derselben Geschwindigkeit an.

Die Formel $v = \sqrt{2gh}$ gilt also nicht blos vom lotrechten Fall und der Bewegung über eine schiefe Ebene, sondern auch von jeder Kurve, welche der Punkt frei oder gezwungen zwischen zwei Punkten beschreibt. So ist z. B. die Endgeschwindigkeit in B (Fig. 43) dieselbe, ob sich der Punkt in der Sehne oder im Bogen von C nach B bewegt. Die Dauer der Bewegung dagegen ist in jeder Kurve eine andere. Diejenige Kurve, welche der Punkt in der kürzersten Zeit durchläuft, heißt Brachystochrone und ist eine Cycloide.

§ 161. **Wurfbewegung.*** Wird ein schwerer Punkt oder Körper geworfen, so steht er in allen Fällen unter dem Einflusse der Wurf- und Schwerkraft zugleich. Wir unterscheiden a) einen

* Die Lehre von der Bewegung geworfener Körper, insbesondere der Geschützkugeln heißt Ballistik.

lotrechten, b) einen horizontalen, c) einen Wurf in beliebiger Richtung.

Lotrechter Wurf. Wird ein schwerer Punkt mit einer Geschwindigkeit $= v_0$ in vertikaler Richtung geworfen, so ist die Bewegung geradlinig, mithin gelten die Gleichungen des § 155

$$v = v_0 \pm v_1;\ s = s_0 \pm s_1.$$

In Rücksicht auf § 142 erhalten wir demzufolge

$$(1)\ v = v_0 + gt;\ s = v_0 t + \tfrac{1}{2} gt^2 \text{ und}$$

$$(2)\ v = v_0 - gt;\ s = v_0 t - \tfrac{1}{2} gt^2,$$

je nachdem die Bewegung abwärts oder aufwärts gerichtet ist. Die Bewegung nach aufwärts erreicht ihr Ende, wenn in Gl. (2) $v = 0$, also

$$(3)\ v_0 = gt, \text{ oder } t = \frac{v_0}{g}$$

geworden ist. In diesem Augenblick hat der Punkt seine größte Höhe, wie aus (2) folgt

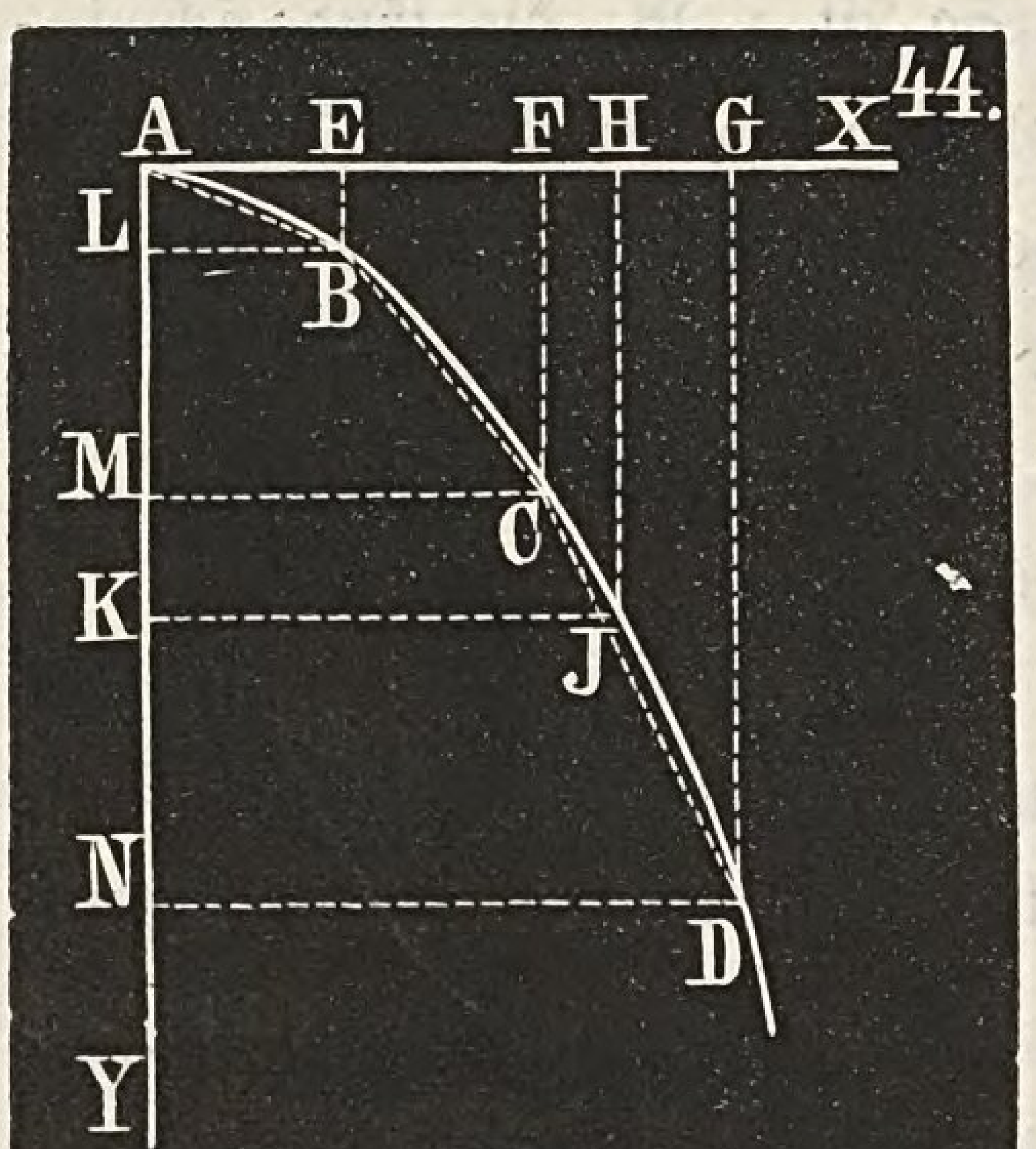
$$(4)\ h = \tfrac{1}{2} gt^2 = \tfrac{1}{2} \frac{v^2}{g}$$

erreicht und fängt zu fallen an. Die Zeit, welche er zum Fallen braucht, ergibt sich unmittelbar aus (4), nämlich

$$t = \frac{v}{g}$$

d. h. in Rücksicht auf (3): der Punkt braucht ebensolange zum Fallen, als zum Steigen.

§ 162. **Horizontaler Wurf.** Wird ein schwerer Punkt mit der Geschwindigkeit v_0 horizontal geworfen, so steht er unter dem Einflusse derselben Kräfte wie vorhin, beschreibt aber eine krummlinige Bahn, welche Parabel heißt. Denn ist (Fig. 44) AX die Richtung des Wurfes, AY die der Schwerkraft, so erfalgt die Seitenbewegung längs AX gleichförmig, längs AY beschleunigt. Ist nun AE = EF =



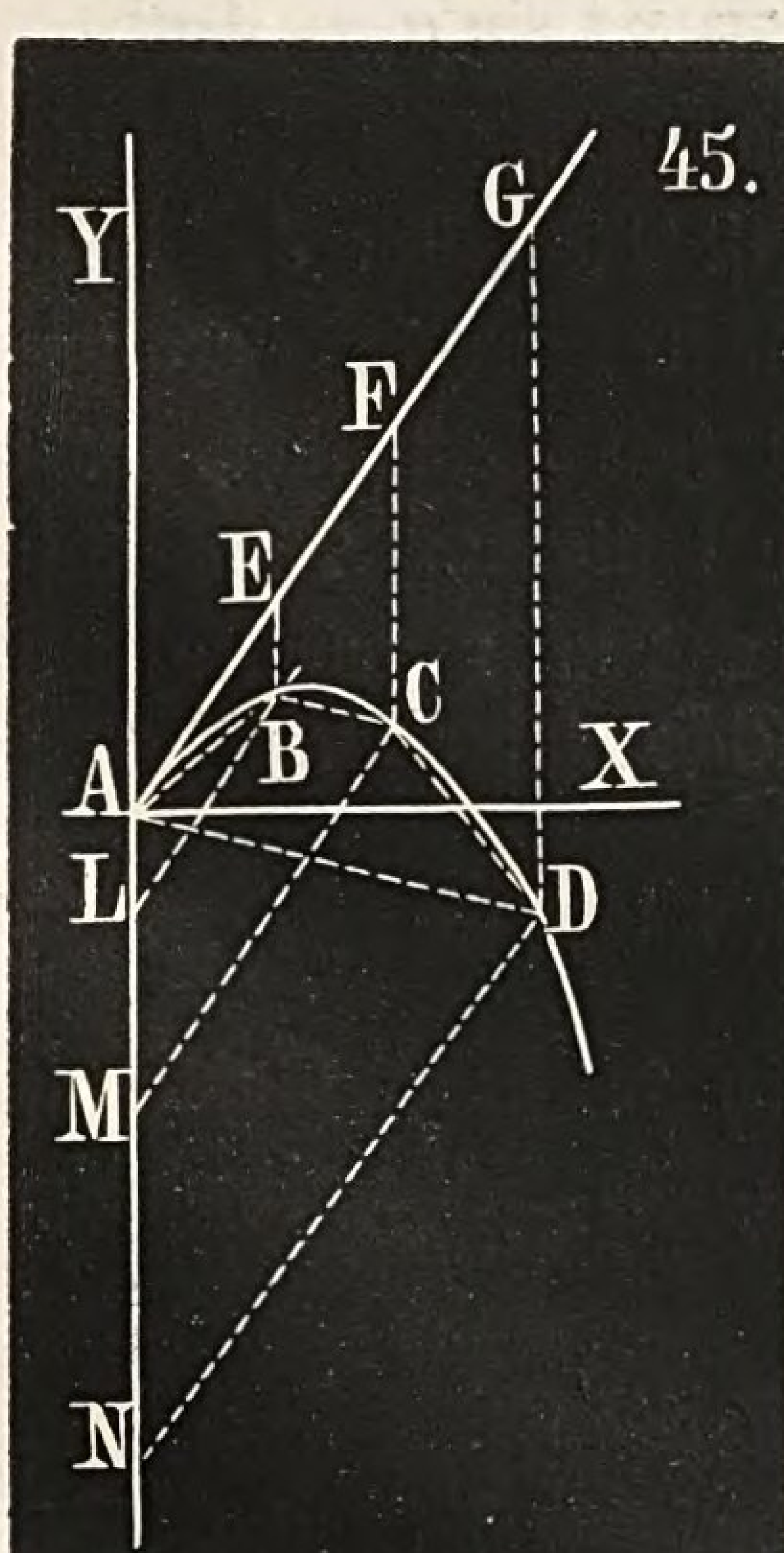
$FG = \ldots = v_o$ und $AL = \frac{1}{2}g$, $AM = \frac{4}{2}$, $AN = \frac{9}{2}g$ u. s. w., so beschreibt der Punkt vermöge der Betrachtungen in § 125 die gebrochene Bahn ABCD...., welche in Wirklichkeit krummlinig ist. Um nun die beliebige Stelle J aufzufinden, welche der Punkt zur Zeit t inne hat, genügt es, JH und JK, die Entfernungen des Punktes von AX und AY zu können. Nun ist aber JH = AK, d. h. gleich dem Fallraume, welcher der Zeit t entspricht, und JK = AH d. h. gleich dem Wege, welchen der Punkt in der Zeit t mit der konstanten Geschwindigkeit v_o längs AX zurücklegt. Setzen wir AH = x und AK = y, so ist

$$(1)\quad x = v_o t, \text{ und } y = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Mit Hülfe dieser zwei Gleichungen, welche für jedes t giltig sind, läßt sich mit aller Sicherheit die Stelle angeben, an der sich der Punkt zu einer beliebigen Zeit befindet. Durch Elimination von t erhalten wir noch

$$(2)\quad y = \tfrac{1}{2}\frac{g}{v_o^2}x^2,$$

welche Gleichung die Gestalt der Bahn unabhängig von der Zeit darstellt. Die Geschwindigkeit v des Punktes in seiner Bahn ist die Resultante aus den rechtwinkeligen Seitengeschwindigkeiten v_o und gt; also



$$(3)\quad v = \sqrt{v_o^2 + g^2t^2},$$

woraus erhellt, daß die Bewegung keine gleichförmig beschleunigte ist. Deßwegen müssen wir auf eine Gleichung zwischen s und t verzichten.

§ 163. **Wurf in beliebiger Richtung.** Wird ein schwerer Punkt in der Richtung AG (Fig. 45) mit der Geschwindigkeit v_o geworfen, so beschreibt er unter dem Einflusse der nämlichen zwei Kräfte wiederum eine Parabel. Ist wie vorhin

$AE = EF = FG = \ldots\ldots = v_0$ und $AL = \frac{1}{2}g$, $AM = \frac{4}{2}g$, $AN = \frac{9}{2}g$ u. s. w. und ziehen wir $LB \parallel MC \parallel ND \parallel AG$, sowie $EB \parallel FC \parallel GD \parallel AY$, so sind A, B, C, D.... die aufeinander folgenden Stellen der Bahn, welche der Punkt von Sekunde zu Sekunde einnimmt.

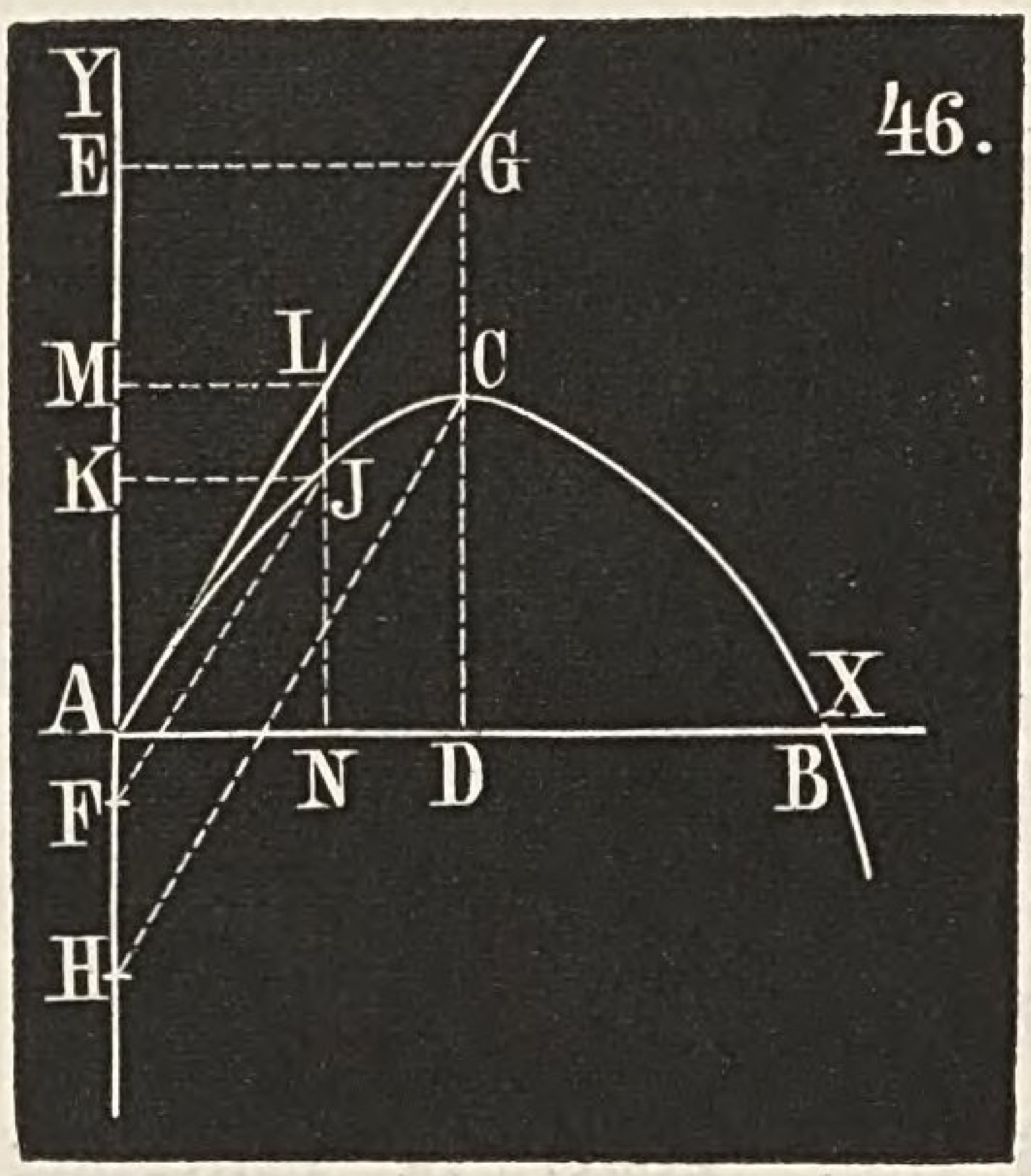
Ist nun (Fig. 46) $AY \perp AX$ und befindet sich der Punkt zur Zeit t in J, so ist die Lage dieses Punktes durch die zwei Lote JN und JK bestimmt, welche wir auf AX und AY ziehen. Konstruieren wir noch das Parallelogramm ALJF und setzen wir $\angle\, GAX = \alpha$, so ist

$$JK = AN = AL \cos \alpha,$$
$$JN = LN - JL = \sin \alpha - AF.$$

Nun ist aber der Voraussetzung zufolge

$$AL = v_0 t \text{ und } AF = \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Setzen wir wie vorhin $JN = AK = y$ und $AN = x$, so folgt durch Substitution der vorstehenden Werte



46.

$$(1)\quad x = v_0 t \cos \alpha$$
$$(2)\quad y = v_0 t \sin \alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Durch diese zwei Gleichungen ist die Stelle J, sowie jede andere, welche einer gegebenen Zeit t entspricht, vollkommen bestimmt. Durch Elimination von t erhalten wir als Gleichung der Bahn

$$3)\quad y = x \operatorname{tang} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Die Bahngeschwindigkeit v läßt sich in jedem Punkte in zwei rechtwinkelige, zu AY und AX parallele Seitengeschwindigkeiten, nämlich in

$$(4)\quad v_0 \sin \alpha - gt \text{ und } v_0 \cos \alpha$$

zerlegen und umgekehrt als Resultante derselben betrachten. Wir erhalten demnach

$$v^2 = v_0^2 + g^2t^2 - 2v_0 gt \sin\alpha,$$

oder wegen $gt^2 - 2v_0 t \sin\alpha = -2y$ aus (2)

$$(5)\ v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2gy}\ \text{(Vergl. § 160)}$$

worin + das Steigen und — das Fallen* oder umgekehrt anzeigt. In gleicher Weise ist y oberhalb AX positiv, unterhalb negativ. Der Punkt wird zu steigen aufhören, wenn die Geschwindigkeit längs AY Null ist; also wenn aus (4)

$$v_0 \sin\alpha - gt = 0, \text{ oder wenn } t = \frac{v_0}{g}\sin\alpha \text{ ist.}$$

Für die größte Höhe CD = h erhalten wir in diesem Falle aus (2) als Wurfhöhe

$$(6)\ h = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha.$$

Ist der Punkt in B, d. h. im Horizont AX angelangt, so ist y = o; mithin aus (3) die Wurfweite

$$(7)\ w = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha.$$

Aus (6) und (7) erhalten wir noch die sehr einfache Beziehung zwischen Wurfhöhe und Wurfweite

$$(8)\quad 4h = w \tang\alpha.$$

Außerdem läßt sich auch hier wie beim vertikalen Wurfe nachweisen, daß der Punkt zum Steigen dieselbe Zeit braucht, als zum Fallen. Endlich erreicht er die möglich größte Weite $w = \frac{v_0^2}{g}$, wenn $\sin 2\alpha = 1$, oder $\alpha = 45^\circ$ ist. Schließlich ist noch zu erwähnen, daß die Wurfrichtung AG auch unter dem Horizont gewählt werden kann. In diesem Falle wirken Wurf- und Schwerkraft längs AY in gleichem Sinne und wir haben in den aufgestellten Gleichungen überall ein + statt — zu setzen. Diesem entsprechend heißt der Richtungswinkel α Elevations- oder Depressionswinkel, je nachdem AG oberhalb oder unterhalb AX genommen wird.

---

* Dieser Unterschied ist überall zu machen, wo die Art der Bewegung zwei entgegengesetzte Richtungen zuläßt.

§ 164. Ist der geworfene Punkt gezwungen, auf einer schiefen Ebene zu bleiben, so beschreibt er gleichfalls eine Parabel. Bezeichnet α den Neigungswinkel, AH den Schnitt der schiefen mit der horizontalen Ebene, AB die Wurfrichtung, β den Winkel BAH, v_o die Wurfgeschwindigkeit, so ist $v_o \cos \beta$ die horizontale und $v_o \sin \beta \mp gt \sin \alpha$ die auf AH senkrechte Geschwindigkeit und folglich analog den Gleichungen 1 bis 3

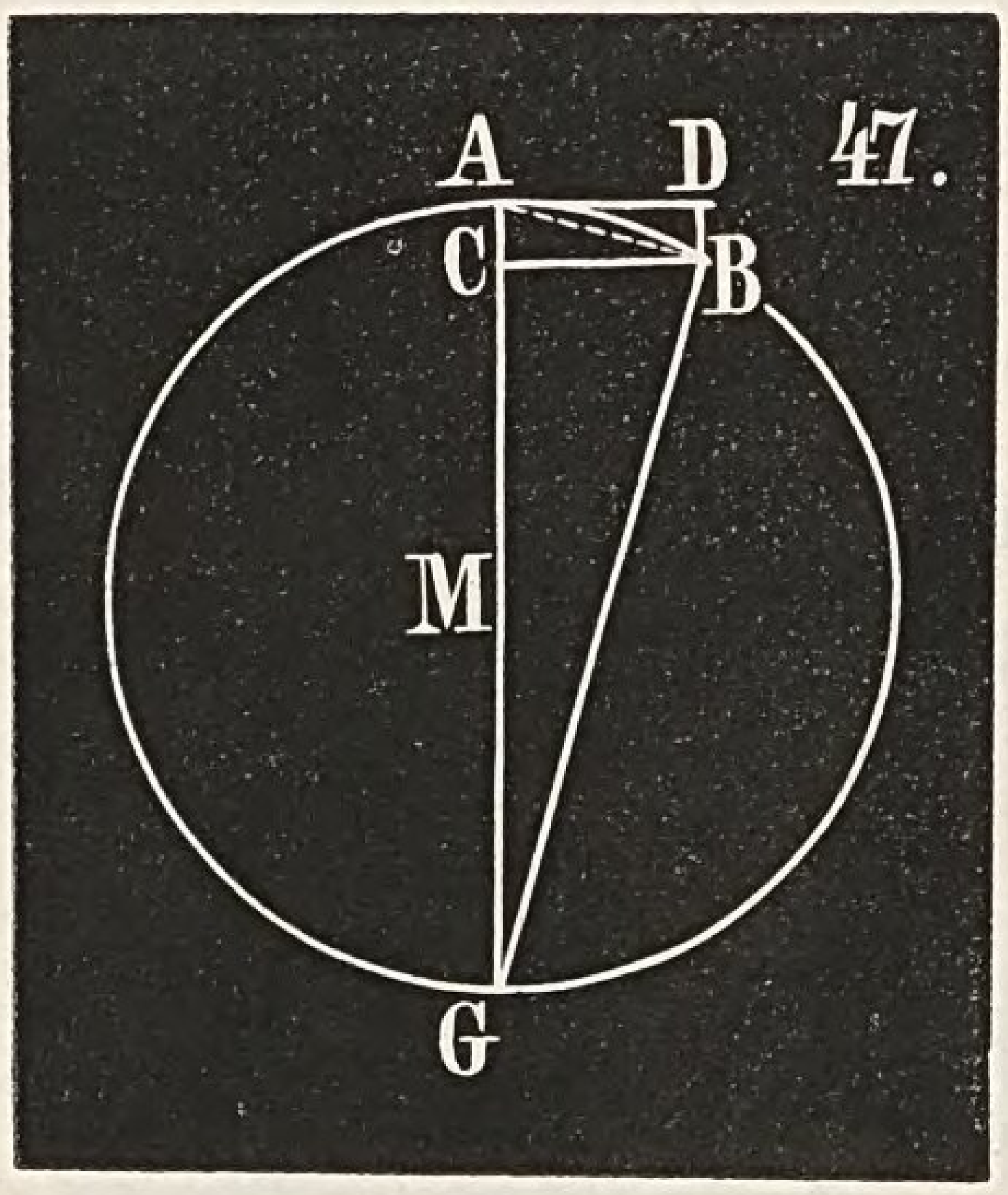
$$(1)\quad x = v_o t \cos \beta$$

$$(2)\quad y = v_o t \sin \beta \mp \tfrac{1}{2} g t^2 \sin \alpha$$

$$(3)\quad y = x \operatorname{tang} \beta \mp \frac{g}{2 v_o^2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \beta} x^2$$

je nachdem der Wurf aufwärts oder abwärts ausgeführt wird.

§ 165. **Kreisbewegung.** Bewegt sich ein Punkt in der Peripherie eines Kreises vom Radius r während der Zeit t von A nach B (Fig. 47), so können wir AB in die rechtwinkeligen Komponenten AC und AD zerlegen, indem wir den Durchmesser AG, die Tangente AD ziehen und die Diagonale AB näherungsweise als Bogen gelten lassen. Demnach wird der Punkt von zwei Kräften in der Richtung AC und AD in Bewegung gesetzt. Die erstere heißt Centripetalkraft, deren Sitz wir im Mittelpunkt M des Kreises annehmen können, die letztere Tangentialkraft. Würde die Centripetalkraft zu wirken aufhören, so müßte sich der Punkt in der Tangente fortbewegen. So lange aber dieß nicht geschieht, muß auch die Centralkraft während der ganzen Bewegung fortdauernd sein; mithin ist die Bewegung längs AC als eine beschleunigte zu betrachten, während wir die Bewegung von A bis C vorläufig als gleichförmig annehmen. Ziehen wir nun die Sehne BG, so ist △ ABC ∽ △ ABG, woraus folgt



47.

$$AC : AB = AB : AG$$

oder wegen AG = 2r, AB = v und AC = $\frac{1}{2}$ a § 116

$$\frac{1}{2}a : v = v : 2r; \text{ somit}$$

$$(1)\ a = \frac{v^2}{r}.$$

So lange aber die Kraft in M sich nicht ändert, bleibt notwendig auch a ungeändert. Dann folgt aus (1), daß v in allen Punkten der Bahn konstant und die Kreisbewegung so lange gleichförmig ist, als die Centralkraft dieselbe bleibt. Gl. (1) gilt indeß in allen Fällen. Ist ferner m die bewegte Masse, so haben wir als Ausdruck der Centralkraft

$$(2)\ P = ma = \frac{mv^2}{r},$$

oder wegen $v = \frac{2r\pi}{T} = r\omega$ nach § 118 Gl. (2) und (1)

$$(3)\ P = mr\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = mr\omega^2.$$

Von dieser Kraft wird m beständig gegen den Mittelpunkt hin angezogen. Weil aber der bewegte Punkt gleichwohl die Peripherie nicht verläßt, so muß zugleich eine andere Kraft thätig sein, welche der Centripetalkraft P an Größe gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist. Diese Kraft heißt Centrifugal- oder Schwungkraft, welche wir mit F bezeichnen wollen. Wird die Gleichheit dieser Kräfte P und F aus was immer für einer Veranlassung gestört, so muß der Punkt die Peripherie des Kreises verlassen.

Für die tangentiale Geschwindigkeit AD haben wir noch

$$(4)\ AD = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{v^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{v}{2r}\sqrt{4r^2 - v^2}.$$

§ 166. **Elliptische Bewegung.** Beschreibt ein Punkt von der Masse m eine Ellipse, so läßt sich der in der Zeiteinheit beschriebene Bogen näherungsweise als Kreisbogen betrachten. Hat der Punkt an einer bestimmten Stelle die Geschwindigkeit v und vom Sitze der anziehenden Kraft im Innern der Kurve

eine Entfernung = r, so ist die centrale Beschleunigung und deren Kraft wie bei der Kreisbewegung

$$(1)\ a = \frac{v^2}{r},\ \text{und}\ (2)\ P = \frac{mv^2}{r}.$$

Da die Entfernung r veränderlich ist, so ist es notwendig auch die Beschleunigung a und die Geschwindigkeit v, während P selbst konstant bleibt. Diese Aenderungen sind jedoch bei den Planetenbahnen so gering, daß wir sie bei vielen Fragen als Kreise betrachten dürfen. Auf eine eingehende Behandlung dieser Bewegungen müssen wir verzichten.

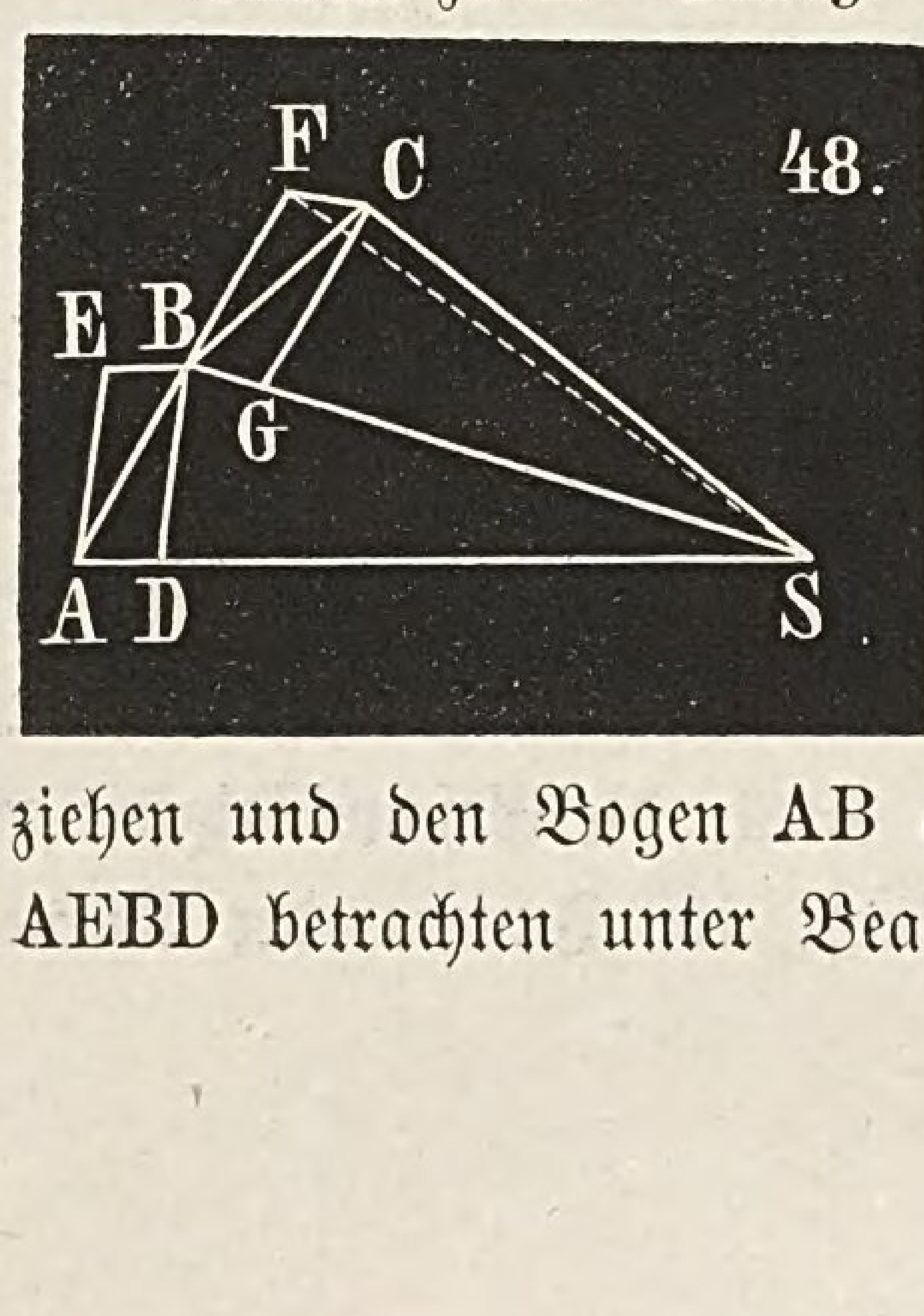
§ 167. Die Kepler'schen Gesetze.

Die von Kepler aufgestellten und nach ihm benannten drei Gesetze der Planetenbewegung lauten:

1) Alle Planeten bewegen sich in Ebenen um die Sonne; ihre Bahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet;
2) die vom Planeten nach der Sonne gezogene Gerade (radius vector) beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume (Sektoren);
3) die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Würfel (Kubus) der Entfernungen von der Sonne.

Von diesen drei Gesetzen können wir mit unsern Hülfsmitteln nur die letzten zwei beweisen.

Beweis zu 2. Bewegt sich der Planet, als Punkt betrachtet,



während der kleinen Zeit t von A nach B (Fig. 48) mit der Geschwindigkeit v, so können wir AB dadurch in die Komponente AD und AE zerlegen, daß wir in A die Tangente AE und eine Gerade AS nach dem Brennpunkte S ziehen und den Bogen AB als Diagonale des Parallelogramms AEBD betrachten unter Beachtung, daß

$$AD = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} t^2$$

sein muß. Dabei dürfen wir ohne merklichen Fehler annehmen, die Geschwindigkeit v habe sich von A bis B so wenig geändert, daß der Punkt dieselbe Geschwindigkeit auch in B noch hat. In B müßte sich ohne Einwirkung der Centralkraft der Planet mit unveränderter Geschwindigkeit in der Tangante BF fortbewegen und in derselben Zeit t einen Weg BF = AB beschreiben. Bewirkt nun die Centralkraft in S eine Ablenkung = BG, so wird die thatsächliche Bewegung von B nach C in der Diagonale des Parallelogramms BFCG erfolgen. Ziehen wir nun FS und CS, so haben wir

$$\triangle ABS = \triangle BFS \text{ (weil } AB = BF)$$
$$\triangle BCS = \triangle BFS \text{ (weil } FC \,\#\, BG)$$

mithin $\triangle ABS = \triangle BCS$, was zu beweisen war.

Beweis zu 3. Nehmen wir die Masse der Sonne zur Einheit und setzen die des Planeten = m, so haben wir für die Anziehungskraft P der Sonne nach § 147 und 166 Gl. (2)

$$(1)\quad P = q \frac{m}{r^2}, \text{ und } P = \frac{mv^2}{r}; \text{ mithin}$$

$$(2)\quad q \frac{m}{r^2} = \frac{mv^2}{r}, \text{ oder } rv^2 = q.$$

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines zweiten Planeten mit v_1, seine Entfernung von der Sonne mit r_1, so haben wir nach derselben Ableitung

$$(3)\quad r_1 v_1^2, = q, \text{ mithin aus (2) und (3)}$$
$$(4)\quad rv^2 = r_1 v_1^2, \text{ oder } v^2 : v_1^2 = r_1 : r \text{ d. h.}$$

die Quadrate der Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt, wie die Entfernungen von der Sonne. Verstehen wir unter v und v_1 die mittleren Geschwindigkeiten und bezeichnen wir mit T und T_1 die Umlaufszeiten; so ist nach § 118

$$v = \frac{2r\pi}{T} \text{ und } v_1 = \frac{2r_1\pi}{T_1}$$

Vermöge dieser Werte erhalten wir aus (4)

$$(5)\quad T^2 : T_1^2 = r^3 : r_1^3$$

wie behauptet wurde.

§ 168. **Bewegung am Wellrade.** Seien R und r die Radien an Rad und Welle, welch letztere wir horizontal voraussetzen, P und Q die daran angebrachten Gewichte, m und m_1 die zu bewegenden Massen, so sind P und Q die bewegenden Kräfte und die Maschine, welche wir ohne Reibungswiderstand voraussetzen, bleibt in Ruhe oder in gleichförmigem Gang, wenn $PR = Qr$ ist; außerdem tritt eine beschleunigte Bewegung ein, deren Beschleunigung für m und m_1 verschieden ist. Die Bestimmung der respektiven Beschleunigung a und a_1 bietet hier deßhalb Schwierigkeiten, weil die Kräfte, abweichend von der bisherigen Betrachtung, keinen gemeinsamen Angriffspunkt haben. Sei nun Q′ ein Gewicht, m′ dessen Masse von solcher Beschaffenheit, daß Q′ am Rade angebracht dieselbe Wirkung hervorbringt, als Q an der Welle, so ist einerseits nach § 94 und 153 (3)

$$(1)\quad Q'R = Qr, \text{ und } m' R^2 = m_1 r^2,$$

andrerseits ist $P - Q'$ eine Kraft mit gemeinsamem Angriffspunkt, welche die vereinigte Masse $m + m'$ wie einen freien Punkt in Bewegung setzt; mithin

$$(P - Q')\, s = \tfrac{1}{2} (m + m')\, (v^2 - v_0^2) \text{ § 137 (2) oder}$$

$$(P - Q')\, R\varphi = \tfrac{1}{2} (m + m')\, R^2 \alpha\varphi \text{ § 153 (2).}$$

Eliminieren wir vermöge (1) Q′ und m′, so wird

$$(2)\quad PR - Qr = \tfrac{1}{2}\, \alpha\, (mR^2 + m_1 r^2),$$

oder wegen $mg = P$, $m_1 g = Q$ und $R\alpha = a$, $r\alpha = a_1$

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} PR - Qr &= \frac{a}{gR} (PR^2 + Qr^2), \\ PR - Qr &= \frac{a_1}{gr} (PR^2 + Qr^2). \end{aligned} \right.$$

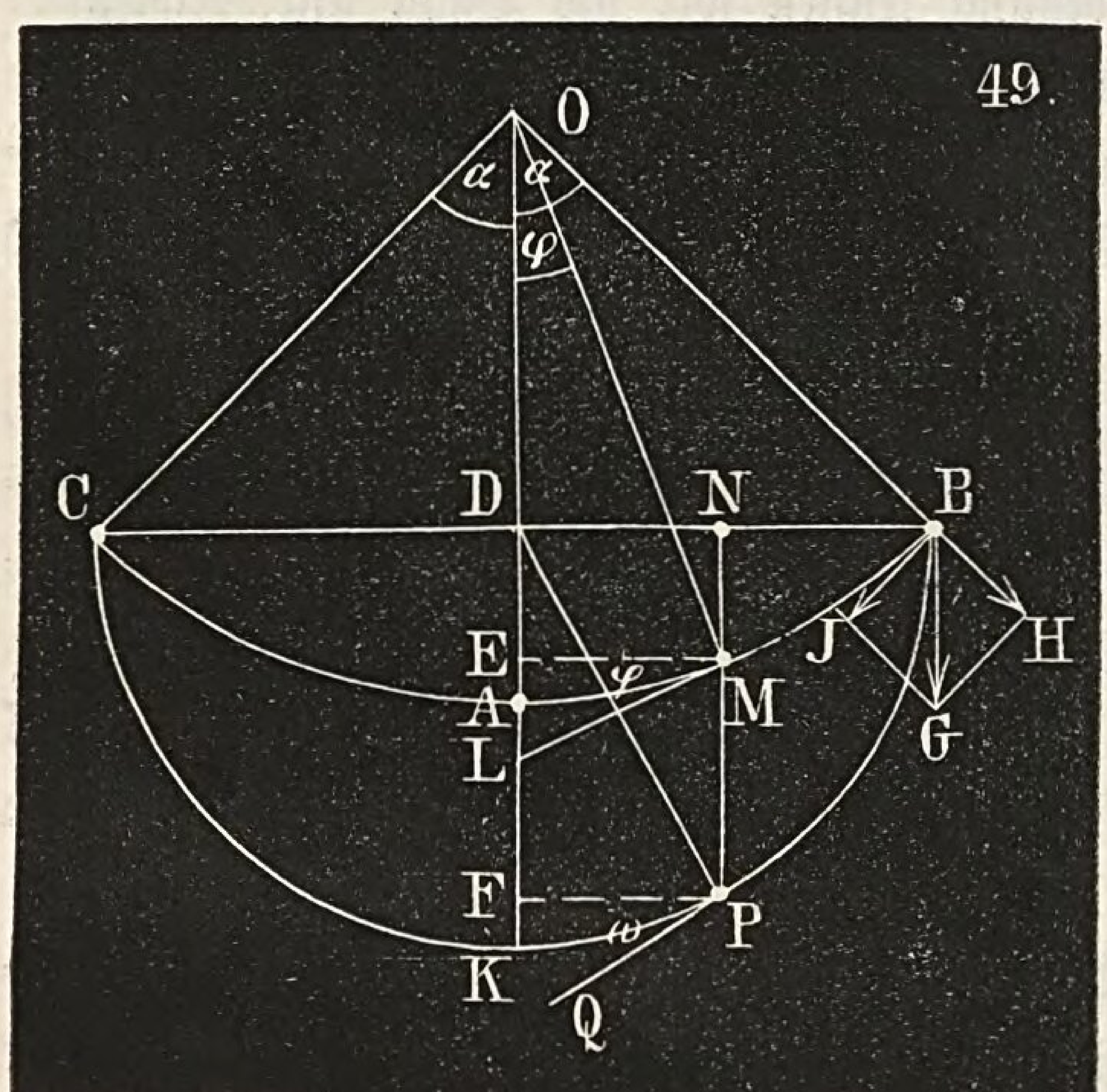
wodurch a und a_1 bestimmt sind; aus der Beschleunigung ergibt sich leicht v und s. Für $R = r$ erhalten wir aus (3) die Formel für eine Atwood'sche Fallmaschine.

Anm. Zu demselben Resultate gelangen wir ohne Mühe durch Anwendung der mechanischen Arbeit. Denn bezeichnen h und h_1 die Längen der Seile, um welche die Gewichte beziehungsweise fallen und steigen, so haben wir einerseits

$$A = Ph - Qh_1 = PR\varphi - Qr\varphi, \text{ andrerseits}$$
$$A = mR^2 \alpha\varphi + m_1r^2 \alpha\varphi \quad \S\ 153\ (2).$$

Durch Gleichstellung dieser Werte ergeben sich die Gleichungen in (3).

§ 169. **Pendelbewegung.** Ist (Fig. 49) ein schwerer Punkt A mittelst eines gewichtslosen undehnsamen Fadens OA in O frei aufgehängt, so wird der Punkt von der Schwere angezogen mit einer Intensität gleich seinem Gewichte und der Faden ist gezwungen, die vertikale Richtung OA anzunehmen. In dieser Lage ist die beschleunigende Kraft in vertikaler Richtung die des freien Falles, also



$$k = a = g.$$

Denken wir uns den Punkt unter steter Spannung des Fadens in die Lage B gebracht und sich selbst überlassen, so ist er auch hier der Schwerkraft unterworfen und wird, wie bei der schiefen Ebene, B verlassen, mit einer gewissen Geschwindigkeit v nach A kommen und die angefangene Kreisbewegung so lange fortsetzen, bis v = o geworden ist. Nach dem Fallgesetze muß dies im Punkte C eintreten, sobald AC = AB ist. In C kann der Punkt ebenso wenig verharren, als in B, er wird neuerdings anfangen, von C bis A zu fallen und von A bis B zu steigen, und auf diese Weise in eine Bewegung hin und her ge-

raten, welche er in's Unendliche fortsetzen müßte, wenn nicht der Widerstand der Luft und der Reibung in O entgegenwirkte.

Eine solche Vorrichtung heißt **Pendel**, die Art der Bewegung **schwingend** (oscillierend), die Bewegung von B bis C oder von C bis B **Schwingung** und die hiezu erforderliche Zeit **Schwingungsdauer**. Der Winkel AOB = AOC = α heißt **Ausschlag-** oder **Elongationswinkel**.

Bei dieser Bewegung kennen wir die Bahn und bewegende Kraft; unsere Aufgabe ist es nun, aus diesen zwei Elementen die Geschwindigkeit v und die Zeit t zu bestimmen, welche dem Wege s entspricht. Die Schwerkraft wirkt stets vertikal; ihr Antrieb zur Bewegung ist aber in unserm Falle um so geringer, je kleiner der Winkel α wird. Denn ist BG ⫲ OA und BG = g, so können wir, weil es auf das Gewicht des Punktes nicht ankommt § 146, BG durch die tangentiale und normale Komponente BJ und BH ersetzen. BH wird durch den Widerstand des Fadens aufgehoben, so daß zum Antrieb der Bewegung BJ allein übrig bleibt. Nun ist aber ∠ JBG = AOB = α; mithin

$$(1)\quad BJ = BG \sin \alpha = g \sin \alpha.$$

Gelangt der Punkt in eine tiefere Lage nach M und bezeichnen wir den Winkel AOM mit φ, so ist hier die tangentiale Beschleunigung g sin φ kleiner als in B, wegen $\varphi < \alpha$, und wird endlich in A zu Null. Da nun die Tangentialkraft während des Fallens beständig abnimmt, so ist die Bewegung **ungleichförmig veränderlich**, deren Behandlung die elementaren Hülfsmittel übersteigt.

Für die Geschwindigkeit v, welche der Punkt an der beliebigen Stelle M erlangt, haben wir nach § 160 $v = \pm\sqrt{2gh}$, worin h den vertikalen Abstand DE der Punkte B und M bezeichnet. In Rücksicht auf Fig. 49 ist aber DE = OE — OD, mithin

$$h = OM \cos \varphi - OB \cos \alpha,$$

oder wegen OM = OB = l

$$h = l\,(\cos \varphi - \cos \alpha) \text{ und}$$

$$(2)\quad v = \pm\sqrt{2gl\,(\cos \varphi - \cos \alpha)}.$$

Beschreiben wir, um wenigstens näherungsweise eine Formel für die Schwingungsdauer t zu finden, über der Sehne BC als Durchmesser einen Halbkreis BKC und stellen uns vor, es bewege sich in diesem Halbkreise gleichzeitig mit dem Pendel ein Punkt P so, daß beide Punkte in jedem Augenblicke dieselbe vertikale Projektion N auf CB haben, so ist klar, daß jeder der beweglichen Punkte in derselben Zeit t seine Bahn beschreibt und es gleichgiltig ist, ob wir t aus der Bewegung des Pendels oder des Punktes P bestimmen. Die Punkte M und P haben demnach stets dieselbe horizontale Geschwindigkeit, wie auch ihre Bahngeschwindigkeit beschaffen sein mag. Bezeichnen wir die Geschwindigkeit des Punktes P zum Unterschied von v mit v, so sind ihre horizontalen Geschwindigkeiten nichts anderes, als die horizontalen Komponenten von v und v. Ziehen wir in M und P die Tangenten ML und PQ, sowie PF $\perp$ OA, setzen $\angle$ FPQ $= \omega$ und beachten, daß Winkel EML $= \varphi$ und DPN $= \omega$ ist, so haben wir die Bedingungsgleichung

$$(3) \quad \mathrm{v} \cos \varphi = v \cos \omega.$$

Nun ist $\sin \omega = \frac{\mathrm{DN}}{\mathrm{DP}} = \frac{\mathrm{ME}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{l} \sin \varphi}{\mathrm{l} \sin \alpha} = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}$;

$$\text{mithin } \cos \omega = \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \alpha}} = \frac{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha}}{\sin \alpha}$$

Vermöge dieses Wertes wird nun aus (3)

$$v = \frac{\mathrm{v} \cos \varphi}{\cos \omega} = \frac{\mathrm{v} \cos \varphi \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \varphi - \cos^2 \alpha}}$$

oder wenn wir aus (2) für v substituieren und reduzieren

$$(4) \quad v = \pm \frac{\sin \alpha \cos \varphi \sqrt{2\,\mathrm{gl}}}{\sqrt{\cos \varphi + \cos \alpha}}.$$

Der Punkt P hat in B und C seine kleinste, in K seine größte Geschwindigkeit; für diese Fälle haben wir beziehungsweise $\varphi = \alpha$ und $\varphi = 0$ zu setzen und erhalten, wenn wir die Bewegung von B bis K positiv nehmen, beziehungsweise

$$v_0 = \sin \alpha \sqrt{\mathrm{gl} \cos \alpha}$$

$$v_1 = \sin \alpha \sqrt{\frac{2\,\mathrm{gl}}{1 + \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{\cos \frac{1}{2} \alpha} \sqrt{\mathrm{gl}}$$

Beide Werte sind nur wenig von einander verschieden und nähern sich um so mehr einander, je kleiner Winkel α genommen wird. Betrachten wir, was nur annähernd richtig ist, die Bewegung des Punktes P als gleichförmig beschleunigt, so haben wir nach § 111 für die halbe Bewegung d. i. von B bis K

$$\text{Bog. BK} = \tfrac{1}{2}(v_o + v_1) \cdot \frac{t}{2}, \text{ oder}$$

$$t = \frac{4 \text{ Bog. BK}}{v_o + v_1} = \frac{2 l\pi \sin\alpha}{v_o + v_1}.$$

Vermöge der vorstehenden Werte ist aber

$$v_o + v_1 = \sin\alpha \sqrt{gl}\left(\sqrt{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\frac{1}{2}\alpha}\right); \text{ mithin}$$

$$(5)\quad t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{1 + \cos\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\cos\alpha}}\right).$$

Obwohl dieser für die ganze Schwingungsdauer t gefundene Ausdruck nicht völlig genau ist, so gibt er doch ein Resultat, welches für einen Ausschlagwinkel $\alpha = 5^0$ auf sieben, und für $\alpha = 30^0$ auf vier Decimalstellen genau ist. Für einen Ausschlagwinkel $\alpha < 5^0$ nähert sich $\cos\frac{1}{2}\alpha$ und $\sqrt{\cos\alpha}$ mehr und mehr der Einheit und in Folge dessen der in Klammer stehende Ausdruck dem Werte $= \frac{1}{2}$. Unter dieser Voraussetzung erhalten wir aus (5) die einfache Formel

$$(6)\quad t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Anm. Entwickelt man den in Klammer stehenden Ausdruck in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $\sin\frac{1}{2}\alpha$ so wird anstatt (5)

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{8}\sin^4\tfrac{1}{2}\alpha + \ldots\right)$$

§ 170. Zusatz. Das hier beschriebene Pendel heißt mathematisches Pendel zum Unterschied von dem physischen, welches aus einer schweren Pendelstange und einer Linse besteht und jedesmal erst auf ein mathematisches reduziert werden muß. Vollendet das Pendel eine volle Schwingung in 1 Sekunde, d. h. ist $t = 1''$, so heißt dasselbe Sekundenpendel.

§ 171. Zusatz. Macht ein Pendel n Schwingungen in der Zeit T, so haben wir als Zeit einer Schwingung

$$(1)\ t = \frac{T}{n} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Hat dasselbe Pendel an einem andern Orte der Erdoberfläche in derselben Zeit T die Schwingungszahl n_1, so beweist dies einerseits, daß sowohl die Beschleunigung der Schwere, als auch die Entfernung vom Erdmittelpunkt eine andere ist; andrerseits haben wir für diesen zweiten Ort

$$(2)\ t_1 = \frac{T}{n_1} = \pi \sqrt{\frac{l}{g_1}}.$$

Aus (1) und (2) folgt nun unmittelbar

$$(3)\quad nt = n_1 t_1, \text{ oder } n : n_1 = t_1 : t$$

$$(4)\quad n : n_1 = \sqrt{g} : \sqrt{g_1} = t_1 : t.$$

Bezeichnen wir die Entfernungen vom Mittelpunkt der Erde mit r und r_1, so haben wir nach § 71 und 146

$$g = \frac{qM}{r^2} \text{ und } g_1 = \frac{qM}{r_1^{\,2}};\ \text{mithin}$$

$$(5)\quad \sqrt{g} : \sqrt{g_1} = r_1 : r = t_1 : t = n : n_1.$$

§ 172. Zusatz. Haben zwei verschiedene Pendel von der Länge l und l_1 in der Zeit T die Schwingungszahlen n und n_1 so ist

$$T = n\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = n_1 \pi \sqrt{\frac{l_1}{g}};\ \text{mithin}$$

$$(6)\ l : l_1 = n_1^{\,2} : n^2;$$

haben dagegen diese Pendel an zwei verschiedenen Orten dieselbe Schwingungszahl n, so besteht die Bedingung

$$(7)\ \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l_1}{g_1}}, \text{ oder } l : l_1 = g : g_1.$$

Demnach muß das Sekundenpendel in demselben Verhältnisse verlängert oder verkürzt werden, als die Beschleunigung der Schwere zu- oder abnimmt.

Viertes Kapitel.

Hindernisse der Bewegung.

§ 173. Jeder Körper, der mit andern in Berührung kommt, erleidet einen gewissen Widerstand in seiner Bewegung.

Einen solchen Widerstand leisten nicht bloß feste, sondern auch flüssige und luftförmige Körper. Aus diesem Grunde sind alle bisher aufgestellten Bewegungsgesetze in Beziehung auf unsere Erde nur ideale, welche der Wirklichkeit nur näherungsweise entsprechen. Von den vielen Hindernissen der Bewegung wollen wir zwei, die Reibung und den Stoß, insoweit besprechen, als es zu einer klaren Vorstellung genügt.

§ 174. **Reibung.** Befindet sich ein Körper vom Gewichte Q im Zustande der Ruhe oder Bewegung auf einer Fläche, so leistet dieselbe einen doppelten Widerstand. Erstlich hält sie den senkrechten (normalen) Druck D des Gewichtes durch einen gleichgroßen Gegendruck aus; zweitens setzt sie der Bewegung einen gewissen Widerstand R entgegen, welcher der Berührungsebene parallel (tangential) ist und Reibung heißt. Die Reibung heißt gleitend oder rollend (wälzend), je nachdem die Bewegung gleitend (fortschreitend ohne Drehung), oder rollend (fortschreitend mit Drehung) ist. Eine besondere Art der Reibung ist die Zapfenreibung bei Drehungen um eine Achse. Die Größe der Reibung ist von verschiedenen Umständen abhängig und wird stets durch Versuche bestimmt. Aus vielfältigen Versuchen haben sich folgende Gesetze ergeben:

1) Die Reibung ist proportional dem Drucke zwischen den sich reibenden Körpern.
2) Die Reibung ist unabhängig von der Größe der sich reibenden Flächen; harte und polierte Flächen bieten eine geringere Reibung als weiche und rauhe.
3) Die Reibung der Ruhe ist größer als die der Bewegung; letztere bleibt für jede Geschwindigkeit dieselbe.
4) Das Schmieren der Flächen vermindert die Reibung.
5) Unter gleichen Umständen ist die gleitende Reibung die größte, die rollende die kleinste von allen.

Anm. Obwohl die Reibungswiderstände auf der einen Seite als etwas Schädliches auftreten und zu ihrer Ueberwindung Kräfte scheinbar nutzlos konsumieren, so sind sie auf der andern Seite zur Bewegung der

organischen Geschöpfe und zur Beschaffung ihrer Bedürfnisse absolut notwendig, so daß schließlich der Nutzen den Schaden weitaus überwiegt.

§ 175. **Reibungscoeffizient. Reibungswinkel.** Wie die Erfahrung lehrt, ist bei ein und derselben Fläche der Reibungswiderstand R stets dem Drucke D proportional. Bezeichnen wir dieses konstante Verhältniß mit f, so ist demzufolge

$$R : D = f, \text{ oder } R = f \cdot D.$$

Die konstante Verhältnißzahl f heißt Reibungscoeffizient. Derselbe ist für Flächen aus verschiedenem Material verschieden und wird stets durch Versuche ermittelt; findet keine Reibung statt, so ist f = o zu setzen.

Befindet sich Q auf einer horizontalen Ebene, so ist D = Q, folglich

$$R = f \cdot Q.$$

Befindet sich ein Körper vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene von der Neigung α sich selbst überlassen, so haben wir unter Bezugnahme auf § 102 und § 156

$$P = Q \sin \alpha, \ D = Q \cos \alpha; \text{ folglich } R = f\, Q \cos \alpha$$

Ist nun α klein genug, so wird Q in Folge der Reibung nicht gleiten und es ist dann

$$R > P, \text{ oder } f\, Q \cos \alpha > Q \sin \alpha;$$

nehmen wir α allmälig größer, so ändert sich zugleich P, D und R, während f konstant bleibt, und wir können es dahinbringen, daß Q zu gleiten anfange. Bezeichnen wir für diesen besonderen Fall den Wert von α mit φ, so haben wir im Augenblick des Gleitens

$$R = P, \text{ oder } f\, Q \cos \varphi = Q \sin \varphi, \text{ hieraus } f = \tang \varphi.$$

Der Winkel φ heißt Reibungswinkel und ist nichts anderes, als jener Winkel, welchen bei jeder schiefen Ebene die Resultante des aus D und dem Reibungswiderstand fD konstruierten Parallelogramms mit der normalen Kraft D bildet. Denn es ist hiernach

$$\tang \varphi = \frac{fD}{D} = f.$$

§ 176. **Gleitende Reibung.** Da die Reibung jedesmal der Bewegung entgegenwirkt, so tritt bei jeder gleitenden Bewegung mit Reibungswiderständen P — R an die Stelle der bewegenden Kraft P, so lange beide Kräfte mit der vor sich gehenden Bewegung gleiche oder parallele Richtung haben; in solchen Fällen jedoch, in denen die Bewegung die entgegengesetzte Richtung von P hat, ist P + R die bewegende Kraft; machen endlich P und R, wie z. B. beim Keil, der Schraube u. s. w. mit der Bewegungsrichtung beziehungsweise die Winkel α und β, so tritt $P \cos \alpha \mp R \cos \beta$ an die Stelle von P, während die Komponenten $P \sin \alpha$ und $R \sin \beta$ auf die fortschreitende Bewegung ohne Einfluß sind (§ 148, 2).

Demnach erhalten wir mit Berücksichtigung der Reibung $R = fQ$ in § 145 anstatt Gl. (1) und (2)

$$(1)\ a = g\frac{P - R}{P + Q} = g\frac{P - fQ}{P + Q};$$

$$(2)\ s = \tfrac{1}{2}\, gt^2\, \frac{P - fQ}{P + Q},$$

wovon die letztere Gleichung auch zur Bestimmung des Reibungscoeffizienten f dient, wenn die übrigen Größen bekannt sind. Man erkennt leicht, daß von der Ruhe aus keine Bewegung eintritt, so lange als $P < f \cdot Q$ ist, sondern erst in dem Augenblick, wenn $P = fQ$, die Bewegung beginnen kann. Sind P und Q für diesen Fall ermittelt, so ergibt sich hieraus

$$(3)\ f = \frac{P}{Q}$$

als Größe des Reibungscoeffizienten der Ruhe.

Gleitet ein Körper vom Gewichte Q unter dem Einfluß der Schwere über eine schiefe Ebene von der Neigung α, so ist P — R oder P + R die bewegende Kraft, je nachdem die Bewegung abwärts oder aufwärts vor sich geht. Wir haben daher für die Beschleunigung a in beiden Fällen beziehungsweise

$$a = g\frac{P \mp R}{Q} = g\,\frac{Q \sin \alpha \mp f\, Q \cos \alpha}{Q},\ \text{oder}$$

$$(4)\ a = g\,(\sin\alpha \mp f\cos\alpha) = g\,\frac{\sin(\alpha \mp \varphi)}{\cos\varphi}$$

und demzufolge anstatt der Gleichungen in § 157 für alle denkbaren Fälle

$$(5)\ v = v_0 \pm gt\,(\sin\alpha \mp f\cos\alpha)$$

$$(6)\ s = v_0 t \pm \tfrac{1}{2} gt^2\,(\sin\alpha \mp f\cos\alpha).$$

§ 177. **Zapfenreibung.** Dieselbe ist eine in der Peripherie des Zapfens tangential wirkende Kraft, deren Wirkung durch das Moment $\varrho R = \varrho \cdot fD$ ausgedrückt ist, wenn ϱ den Radius des Zapfens bezeichnet. Bezeichnen wir ferner mit r den Radius der Rolle oder des Rades an der Atwood'schen Fallmaschine, so haben wir unter Berücksichtigung, daß nach § 28 $D = P + Q$, als Bedingung des Gleichgewichts analog § 94

$$r\,(P - Q) = \varrho \cdot fD = \varrho f\,(P + Q).$$

Tritt Bewegung ein und ist X diejenige Kraft, welche analog § 168 am Rade angebracht, die Zapfenreibung zu ersetzen vermag, so muß die Bedingung erfüllt sein

$$rX = \varrho f\,(P + Q).$$

Nun ist $P - Q - X$ die bewegende Kraft und $P + Q$ das Gewicht der bewegten Masse, folglich

$$a = g\,\frac{P - Q - X}{P + Q} = g\left(\frac{P - Q}{P + Q} - \frac{f\varrho}{r}\right);\ \text{mithin}$$

$$s = \tfrac{1}{2} gt^2 \left(\frac{P - Q}{P + Q} - \frac{f\varrho}{r}\right).$$

Aehnlich verhält es sich in anderen Fällen.

§ 178. **Anwendung auf einfache Maschinen.**

I. Soll eine Last Q auf einer schiefen Ebene von der Kraft P im Gleichgewicht erhalten werden, so haben wir wegen $D = Q\cos\alpha - P\sin\beta$ anstatt Gl. (1) § 102

$$P\cos\beta = Q\sin\alpha \pm f\,(Q\cos\alpha - P\sin\beta),\ \text{oder}$$

$$(1)\ P\,(\cos\beta \pm f\sin\beta) = Q\,(\sin\alpha \pm f\cos\alpha),$$

je nachdem Q auf dem Punkte steht, aufwärts oder abwärts in Bewegung überzugehen. Durch Einführung des Reibungswinkels

φ vermöge der Gleichung $f = \text{tang}\,\varphi$ erhalten wir noch nach einer kleinen Reduktion

$$(2)\ P \cos(\beta \mp \varphi) = Q \sin(\alpha \pm \varphi).$$

Für den besonderen Fall $\beta = o$ und $\beta = -\alpha$ ergibt sich hieraus beziehungsweise

$$(3)\ P \cos\varphi = Q \sin(\alpha \pm \varphi),$$

$$(4)\ P = Q\,\text{tang}\,(\alpha \pm \varphi).$$

II. Für das Gleichgewicht an einer Schraube erhalten wir vermöge der letzten Gleichung aus § 103 entweder

$$(1)\ P = Q\,\text{tang}\,(\alpha \pm \varphi) = Q\,\frac{h \pm 2\,r\pi f}{2\,r\pi \mp hf},\ \text{oder}$$

$$(2)\ P = \frac{r}{a}\,Q\,\text{tang}\,(\alpha \pm \varphi) = \frac{r}{a}\,Q\,\frac{h \pm 2\,r\pi f}{2\,r\pi \mp hf},$$

je nachdem die Kraft P in der Peripherie der Schraube oder an einem Hebelarm von der Länge a angreift.

III. Aus § 104 Gl. (1) erhalten wir für das Gleichgewicht an einem gleichschenkeligen Keil,

$$P = 2\,D \sin\alpha \pm 2\,Df \cos\alpha = 2\,D\,\frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos\varphi},$$

je nachdem der Keil auf dem Punkte steht, eine Bewegung vorwärts oder rückwärts zu machen.

§ 179. **Wirkungsgrad der Maschinen.** Die Bedingungen des Gleichgewichts an einer Maschine sind dieselben, wie die der gleichförmigen Bewegung derselben. Ist nun P diejenige Kraft, welche die Last Q mit Reibung gleichförmig zu bewegen vermag und P′ jene Kraft, welche dieselbe Arbeit ohne Reibung leisten würde, so ist P die angewandte, P′ die nützliche, P—P′ die nutzlose oder verlorene Kraft; das Verhältniß P′s : Ps oder was dasselbe ist, P′ : P gibt den Wirkungsgrad e der Maschine. Die Nutzkraft P′ ergibt sich aus den vorausgehenden Formeln dadurch, daß wir $f = o$ oder $\varphi = o$ setzen. Wir erhalten daher unter Beachtung, daß von dem doppelten Vorzeichen für f überall nur + beizubehalten ist,

$$e = \frac{\sin\alpha\cos\varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}$$ für den Keil.

$$e = \frac{\tang\alpha}{\tang(\alpha + \varphi)}$$ für die Schraube,

$$e = \frac{\sin\alpha\cos(\beta - \varphi)}{\cos\beta\sin(\alpha + \varphi)}$$ für die schiefe Ebene.

§ 180. **Stoß.** Treffen zwei Körper in ihrer Bewegung auf einander, so bringt jeder auf den andern einen Stoß von gleicher und entgegengesetzter Wirkung § 146 hervor, in Folge dessen jeder genötigt wird, seine Bewegung abzuändern. Von den verschiedenen möglichen Fällen nehmen wir der Einfachheit wegen an, die zwei Körper bewegen sich in ein und derselben Geraden, welche ihre Schwerpunkte verbindet (gerader centraler Stoß). Je nach ihrer Beschaffenheit werden die Körper nach dem Zusammenstoße entweder vereinigt bleiben und mit gleicher Geschwindigkeit ihre Bewegung gemeinschaftlich fortsetzen, beziehungsweise in Ruhe bleiben, oder zurückprallen und getrennt jeder mit einer anderen Geschwindigkeit sich bewegen. Das Erstere findet bei den unelastischen, das Letztere bei den elastischen Körpern statt. Im ersteren Fall, den wir allein betrachten wollen, muß offenbar der eine an Geschwindigkeit gewinnen, der andere verlieren. Ueberdies leuchtet ein, daß die Dauer des Zusammenstoßes für beide Körper dieselbe ist und wir ebendeßwegen zur richtigen Beurteilung der durch den Stoß hervorgebrachten Wirkungen von der Gleichung $P \cdot t = m(v - v_0)$ § 137 (1) ausgehen müssen.

Bezeichnen wir mit m_1, m_2 die Massen, mit v_1, v_2 die Geschwindigkeiten der zwei Körper vor dem Stoße, mit v jene nach dem Stoße, ferner mit t die Dauer und mit P die in beiden gleiche Kraft des Stoßes, so haben wir nach vorstehender Gleichung beziehungsweise

$$P \cdot t = m_1(v - v_1); \quad P \cdot t = m_2(v \mp v_2),$$

je nachdem m_2 in gleichem oder entgegengesetztem Sinne von m_1 sich bewegt. Da nun beide Wirkungen gleich und entgegengesetzt sind, so folgt

$$m_1 (v - v_1) = - m_2 (v \mp v_2), \text{ oder}$$

$$(1)\ v = \frac{m_1 v_1 \pm m_2 v_2}{m_1 + m_2};\ (2)\ v = \frac{Q_1 v_1 \pm Q_2 v_2}{Q_1 + Q_2},$$

wenn Q_1 und Q_2 die Gewichte der Massen sind.

§ 181. Zusatz. Stellen wir Gl. (1) in der Form dar

$$(m_1 + m_2) v = m_1 v_1 \pm m_2 v_2,$$

so heißt dies: die Quantität der Bewegung nach dem Stoße ist gleich der vor dem Stoße. Daraus folgt, daß der eine Körper an Bewegungsgröße ebensoviel gewonnen, als der andere verloren hat.

§ 182. Zusatz. Während also an Quantität der Bewegung nichts verloren geht, wird gleichwohl eine gewisse Kraft verbraucht, welche erforderlich ist, die Körper so zusammen zu drücken, als es durch den Stoß geschehen ist; oder mit andern Worten, es geht bei jedem Zusammenstoße eine gewiße mechanische Arbeit verloren. Nun ist die lebendige Potenz vor dem Stoße

$$= \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2; \text{ und nach dem Stoße}$$

$$= \tfrac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2 = \tfrac{1}{2} \frac{(m_1 v_1 \pm m_2 v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Die Differenz aus beiden

$$= \tfrac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 \mp v_2)^2$$

gibt den Verlust an mechanischer Arbeit.

§ 183. Zusatz. Ist einer der beiden Körper in Ruhe, so ist selbstverständlich die Geschwindigkeit desselben = o zu setzen.

Fällt ein schwerer Körper vom Gewichte Q von einer Höhe = h auf einen ruhenden Körper, dessen Gewicht gegen Q verschwindend klein ist, so erhalten wir wegen $v_2 = 0$ und $m_2 = 0$ aus Gl. (1)

$$(1)\ v = \frac{m_1 v_1}{m_1} = v_1 = \sqrt{2gh}\ \S\ 159\ (3).$$

Ist dieser ruhende Körper z. B. ein Nagel, der in ein widerstehendes Mittel getrieben werden soll, so ist $m_1 + m_2 = \frac{Q}{g}$

die bewegliche Masse und $v = \sqrt{2gh}$ die Geschwindigkeit, mit welcher sie den Nagel einzutreiben strebt; folglich die lebendige Potenz

$$(2)\ A = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}\cdot 2gh = Q\cdot h;$$

ist R der Widerstand des Mittels, s die Tiefe des eindringenden Nagels, so ist $R\cdot s$ die Größe der dem Schlage gleichkommenden mechanischen Arbeit; mithin

$$(3)\ R\cdot s = Q\cdot h = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2.$$

Soll ein Pfahl vom Gewichte Q durch einen schweren Körper vom Gewichte P in den Boden eingetrieben werden, so wird analog

$$(4)\ v = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{P\sqrt{2gh}}{P + Q},$$

wenn h die Fallhöhe ist. Nehmen wir an, daß P nach dem Stoße zurückspringt, während Q in den Boden eindringt, so erhalten wir analog (3)

$$(5)\ R\cdot s = \tfrac{1}{2}\frac{Q}{g}v^2 = \frac{hP^2Q}{(P + Q)^2},$$

welche Formel dazu dient, den Widerstand des Bodens, oder die Tragfähigkeit des Pfahles zu berechnen.

III. Teil.

A. Aufgaben über das Gleichgewicht.

I. Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte an einem Punkte.

1. Zwei Kräfte von P und Q Kilogr., deren Richtungen einen Winkel $= \alpha$ bilden, greifen einen Punkt A an. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 74$;	2) $P = 126,4$;	3) $P = 233,8$;	4) $P = 97$;
$Q = 43$	$Q = 209,5$	$Q = 159,3$	$Q = 74,9$
$\alpha = 117^0$	$\alpha = 102^0 32'$	$\alpha = 90^0$	$\alpha = 151^0 34'$

2. Die Seitenkraft P bildet mit der Resultante R einen Winkel $= \beta$. Wie groß ist die andere Seitenkraft Q, sowie ihr Winkel γ, denn sie mit R bildet, wenn

1) $P = 50$*;	2) $P = 205,2$;	3) $P = 133$;	4) $P = 91,5$
$R = 150$	$R = 192,5$	$R = 218$	$R = 87,6$
$\beta = 47^0$	$\beta = 56^0 20'$	$\beta = 127^0$	$\beta = 12^0 38'$

3. Zwei Kräfte P und Q bilden mit ihrer Resultante R die Winkel β und γ. Wie groß ist Q und R, wenn

1) $P = 174$;	2) $P = 38,8$;	3) $P = 454$;	4) $P = 358,8$
$\beta = 53^0$	$\beta = 3^0 6'$	$\beta = 15^0 23'$	$\beta = 81^0 20'$
$\gamma = 63^0$	$\gamma = 92^0$	$\gamma = 46^0 29'$	$\gamma = 24^0 33'$

4. Die Kräfte P, P_1, P_2 in einer Ebene, welche den Punkt A angreifen, bilden beziehungsweise (§ 21) die Winkel α, β, γ unter sich. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn $\gamma = \alpha + \beta$ und

1) $P = 12$; $P_1 = 12$; $P_2 = 14$; $\alpha = 21^0$; $\beta = 18^0$
2) $P = 66$; $P_1 = 19$; $P_2 = 16$; $\alpha = 40^0$; $\beta = 63^0$
3) $P = 30$; $P_1 = 25$; $P_2 = 28$; $\alpha = 18^0$; $\beta = 45^0$

5. Welches ist die Resultante der Größe und Richtung nach aus drei Kräften P, P_1, P_2, wenn jede derselben auf den beiden andern senkrecht ist, falls

1) $P = 18$;	2) $P = 48$;	3) $P = 80$;	4) $P = 72$
$P_1 = 24$	$P_1 = 14$	$P_1 = 144$	$P_1 = 16$
$P_2 = 72$	$P_2 = 120$	$P_2 = 42$	$P_2 = 63$

6. Welches sind die drei senkrechten Komponenten X, Y, Z der vorigen Aufgabe, wenn sie mit ihrer Resultante R die Winkel λ, μ, ν machen, im Falle

---

* Ueberall, wo das Gewicht nicht näher bezeichnet ist, steht die Wahl der Einheit frei.

1) $R = 560$; $\lambda = 80^0$; $\mu = 65^0$; $\nu = 27^0 11' 14{,}6''$
2) $R = 620$; $\lambda = 74^0$; $\mu = 70^0$; $\nu = 26^0\ 3' 25{,}8''$
3) $R = 750$; $\lambda = 63^0$; $\mu = 52^0$; $\nu = 49^0 54'\ 8{,}8''$

7. Drei gleiche Kräfte im Raume von P Kilogramm bilden unter sich die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante R der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 21$; $\alpha = 32^0 50'$; $\beta = 48^0 24'$; $\gamma = 60^0$
2) $P = 27$; $\alpha = 30^0$; $\beta = 60^0$; $\gamma = 90^0$
3) $P = 45$; $\alpha = 16^0 25'$; $\beta = 33^0 12'$; $\gamma = 45^0$

8. Drei Kräfte, welche (Fig. 9 § 24) in einer Ebene liegen und den Punkt A angreifen, bilden mit der Richtung AX beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welches ist ihre Resultante der Größe und Richtung nach, wenn

1) $P = 39$; $P_1 = 27$; $P_2 = 9$; $\alpha = 12^0$; $\beta = 40^0$; $\gamma = 109^0$
2) $P = 46$; $P_1 = 91$; $P_2 = 36$; $\alpha = 24^0$; $\beta = 97^0$; $\gamma = 204^0$
3) $P = 76$; $P_1 = 87$; $P_2 = 47$; $\alpha = 49^0$; $\beta = 120^0$; $\gamma = 215^0$
4) $P = 56$; $P_1 = 35$; $P_2 = 64$; $\alpha = 70^0$; $\beta = 104^0$; $\gamma = 140^0$

9. Zwei Kräfte P und Q machen mit der Richtung AX (Fig. 9 § 24) beziehungsweise die Winkel α und $90^0 + \alpha$. Welchen Winkel macht die Resultante R mit AX, wenn

1) $P = 72$;	2) $P = 37$;	3) $P = 49$;	4) $P = 124$
$Q = 49$	$Q = 95$	$Q = 23$	$Q = 87$
$\alpha = 75^0$	$\alpha = 93^0$	$\alpha = 172^0$	$\alpha = 79^0$

10. Eine Kraft R soll in zwei rechtwinkelige Komponenten P und Q zerlegt werden, so daß sie sich verhalten wie 5 : 12, falls

1) $R = 78$; 2) $R = 117$; 3) $R = 169$; 4) $R = 204$

II. Gleichgewicht an einem Punkte.

11. Drei Kräfte P, Q und R in einer Ebene halten sich am Punkte A Gleichgewicht. Welches sind die Winkel α, β, γ, die sie unter sich bilden, wenn

1) $P = 10$;	2) $P = 12$;	3) $P = 21$;	4) $P = 7$
$Q = 14$	$Q = 16$	$Q = 28$	$Q = 24$
$R = 18$	$R = 20$	$R = 35$	$R = 25$

12. Welche Winkel macht in der vorausgehenden Aufgabe R mit P und Q, wenn P und Q den Winkel α einschließen und

1) $P = 37{,}5$;	2) $P = 83{,}6$;	3) $P = 67$;	4) $P = 28$
$Q = 48{,}9$	$Q = 49{,}5$	$Q = 92$	$Q = 43$
$\alpha = 60^\circ$	$\alpha = 93^\circ$	$\alpha = 124^\circ$	$\alpha = 165^\circ$

13. Die Kräfte P, Q und R in einer Ebene halten sich am Punkte A Gleichgewicht. Welche Winkel machen P und Q mit der horizontalen Richtung AX, wenn R einen Winkel $= \gamma$ mit AX macht, und

1) $P = 96{,}8$; $Q = 73$; $R = 136{,}3$; $\gamma = 45^\circ$
2) $P = 125{,}7$; $Q = 81{,}5$; $R = 91{,}2$; $\gamma = 34^\circ$
3) $P = 76{,}5$; $Q = 124$; $R = 85{,}6$; $\gamma = 75^\circ$

14. An den Endpunkten eines Seiles, welches über zwei vertikale Leitrollen in A und B geführt wird, wirken zwei Gewichte P und Q. Wie groß muß ein drittes Gewicht R in C (zwischen A und B) angebracht werden, damit Gleichgewicht stattfinde und Winkel ACB ein rechter sei, wenn

1) $P = 24$;	2) $P = 504$;	3) $P = 77$;	4) $P = 48$
$Q = 70$	$Q = 78$	$Q = 36$	$Q = 14$

15. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Winkel α, welchen AC mit dem Horizont macht?

16. Wenn in der Aufgabe 14 das Gewicht R hinweggenommen wird, so besteht nur dann Gleichgewicht, wenn $P = Q$ ist, wie auch die gegenseitige Lage von A und B sein mag. Warum?

17. Wie groß ist in Aufgabe 14 Winkel ACB, wenn $P = Q$ und

1) $P = 4{,}15$;	2) $P = 3{,}85$;	3) $P = 7{,}54$;	4) $P = 5{,}73$
$R = 6{,}34$	$R = 4{,}92$	$R = 5{,}38$	$R = 7{,}48$

18. Welches ist in 17 der höchste Wert, den R annehmen kann?

19. Ein Seil, welches in A befestigt und über eine feste Rolle in B (tiefer als A gelegen), geleitet ist, trägt an seinem Ende eine Last Q, an einer Stelle C zwischen A und B wird

ein Gewicht P festmacht, welches das Seil so spannt, daß der Teil BC eine horizontale Richtung annimmt. Welches ist die Spannung S und Neigung α von AC gegen den Horizont, wenn

1) $P = 30$;	2) $P = 90$;	3) $P = 33$;	4) $P = 55$
$Q = 16$	$Q = 56$	$Q = 56$	$Q = 48$

20. In zwei in gleicher Höhe über dem Horizont gelegenen Punkten A und B von der Entfernung $AB = a$ Meter werden zwei Seile befestigt. Das eine von der Länge $AC = b < a$ trägt in C einen Ring, das andere geht durch den Ring in C und trägt an seinem Ende ein Gewicht P, welches die beiden Seile so spannt, daß ACB die Gestalt eines Dreieckes annimmt. Bestimme die Spannung S von AC und den Winkel α, welchen AC mit AB macht, wenn

1) $a = 2$;	2) $a = 1{,}56$;	3) $a = 2{,}55$;	4) $a = 6{,}09$
$b = 0{,}7$	$b = 1{,}19$	$b = 1{,}61$	$b = 0{,}41$
$P = 15$	$P = 26$	$P = 17$	$P = 40$

21. In den Punkten A und B einer horizontalen Geraden $AB = a$ ist eine Schnur von solcher Länge $= s$ in ihren Enden fest gemacht, daß ein in C angebrachtes Gewicht P dieselbe unter einem Winkel $ACB = 90°$ spannt. Welche Spannung S und S_1 erleidet AC und BC, wenn

1) $a = 1{,}5$;	2) $a = 2.5$;	3) $a = 2{,}5$;	4) $a = 1{,}8$
$s = 2{,}1$	$s = 3{,}5$	$s = 3{,}1$	$s = 2{,}3$
$P = 40$	$P = 75$	$P = 50$	$P = 34$

22. Wie groß berechnet sich S und S_1 in 21, wenn C die Mitte der Schnur ist, a, s, P ungeändert bleiben?

23. Ein vertikales auf der Basis AC ruhendes gleichschenkeliges Dreieck trägt ein mittelst einer Schnur in der Spitze B angebrachtes Gewicht P. Welchen Widerstand R und R_1 haben die Seite $= a$ und Basis $= b$ zu leisten, wenn

1) $a = 1{,}5$;	2) $a = 2{,}6$;	3) $a = 5$;	4) $a = 1{,}7$
$b = 1{,}8$	$b = 2$	$b = 6$	$b = 1{,}6$
$P = 96$	$P = 120$	$P = 72$	$P = 60$

24. Von vier Kräften P, P_1, P_2, P_3 in einer Ebene welche sich an einem Punkte A Gleichgewicht halten, macht P mit P_1, desgleichen P_2 mit P_3 einen Winkel $= 90^0$. Wie groß ist P_3 und welchen Winkel machen die zunächst liegenden Kräfte P_1 und P_2 mit einander, wenn

1) $P = 14$;	2) $P = 154$;	3) $P = 126$;	4) $P = 21$
$P_1 = 48$	$P_1 = 72$	$P_1 = 19{,}5$	$P_1 = 72$
$P_2 = 39$	$P_2 = 40$	$P_2 = 41$	$P_2 = 61$

25. Wie groß sind in der vorigen Aufgabe P_2 und P_3, wenn $P \perp P_3$, $P_1 \perp P_2$ und P mit P_1 einen Winkel $= \beta$ macht, falls

1) $P = 21$;	2) $P = 6$;	3) $P = 28$;	4) $P = 15$
$P_1 = 28$	$P_1 = 17{,}5$	$P_1 = 96$	$P_1 = 8$
$\beta = 60^0$	$\beta = 15^0$	$\beta = 53^0$	$\beta = 35^0$

26. Von vier Kräften P, P_1, P_2, R im Raume, welche an einem Punkte A sich Gleichgewicht halten, sind die ersten drei auf einander senkrecht. Welche Winkel macht R mit den drei senkrechten Kräften, wenn

1) $P = 6$;	2) $P = 8$;	3) $P = 12$;	4) $P = 12$
$P_1 = 8$	$P_1 = 11$	$P_1 = 11$	$P_1 = 16$
$P_2 = 24$	$P_2 = 16$	$P_2 = 24$	$P_2 = 48$

III. Resultante und Gleichgewicht paralleler Kräfte.

27. Zwei parallele Kräfte P und P_1 greifen in den Punkten A und B einer Geraden an und haben von einem dritten Punkte O derselben Geraden eine Entfernung $OA = a$*, $OB = a_1$. Welches ist ihre Resultante R und ihre Entfernung vom Punkte O (§ 38 und 42), wenn

1) $P = 26$;	$a = 3{,}4$;	$P_1 = 14$;	$a_1 = 5{,}2$
2) $P = 74$;	$a = 2{,}4$;	$P_1 = -34$;	$a_1 = 0{,}8$
3) $P = 42$;	$a = 5{,}3$;	$P_1 = 32$;	$a_1 = 1{,}5$
4) $P = 24$;	$a = -5$;	$P_1 = -24$;	$a_1 = 0{,}5$

---

* Als Längeneinheit ist überall der Meter $1^m = 3{,}426309$ bay. F. gemeint, ohne andere Einheiten auszuschließen.

28. Drei parallele Kräfte P, P_1, P_2 an einer Geraden greifen in A, B, C an und haben vom Punkte O derselben Geraden eine Entfernung OA = a, OB = a_1, OC = a_2. Welches ist ihre Resultante, sowie ihre Entfernung von O, wenn

1) $P = 12$; $a = 3$; $P_1 = -9$; $a_1 = 4$; $P_2 = 7$; $a_2 = 0{,}6$
2) $P = 25$; $a = -2$; $P_1 = 13$; $a_1 = 3$; $P_2 = -8$; $a_2 = -0{,}4$
3) $P = -33$; $a = -4$; $P_1 = 48$; $a_1 = 5$; $P_2 = 6$; $a_2 = -17$

29. Drei parallele Kräfte, P, Q, R an einer Geraden, deren Entfernung vom Punkte O dieser Geraden, analog der vorigen Aufgabe mit a, a_1, a_2 bezeichnet sind, halten sich Gleichgewicht. Wie groß ist R und an welchem Punkt greift sie an, wenn

1) $P = 68$; $a = 1{,}2$; $Q = 52$; $a_1 = 4{,}2$
2) $P = -44$; $a = -3{,}6$; $Q = 26$; $a_1 = 1{,}8$
3) $P = 36$; $a = -4$; $Q = -60$; $a_1 = 2{,}4$

30. An den Endpunkten eines horizontalen Dreiecks ABC wirken drei gleiche Gewichte = P. Bestimme die Resultante R und den Angriffspunkt O derselben durch die Seiten a, b, c, wenn

1) $P = 30$; $a = 26$; $b = 17$; $c = 25$
2) $P = 58$; $a = 25$; $b = 28$; $c = 17$
3) $P = 64$; $a = 13$; $b = 40$; $c = 37$
4) $P = 80$; $a = 45$; $b = 42$; $c = 39$

31. In der Ebene der zwei Senkrechten OX und OY befindet sich ein Dreieck ABC, deren Endpunkte von beiden Geraden einen Abstand haben, welcher beziehungsweise durch a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 ausgedrückt ist. Bestimme (§ 50) die Resultante der drei parallelen Kräfte P, P_1, P_2, welche in A, B, C angreifen, sowie die Lage ihres Angriffspunktes, wenn

$$(1)\left\{\begin{array}{lll} P = 46; & P_1 = -37; & P_2 = 16 \\ P = 5{,}2; & a_1 = 0 & a_2 = -4 \\ P = 3{,}5; & b_1 = 0 & b_2 = 1{,}2 \end{array}\right.$$

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} P = 29; & P_1 = 35 & P_2 = -14 \\ a = 3{,}2 & a_1 = -2 & b_2 = 0 \\ b = 4{,}3 & b_1 = 3{,}5; & b_2 = 0{,}8 \end{array}\right.$$

$$3)\ \begin{cases} P = 27; & P_1 = -35; & P_2 = 13 \\ a = 2{,}5; & a_1 = -2{,}4; & a_2 = -3 \\ b = 1{,}4; & b_1 = 3; & b_2 = 2{,}6 \end{cases}$$

32. An den Ecken A, B, C eines rechtwinkeligen Dreieckes wirken drei Kräfte P, P_1, P_2 senkrecht auf die Ebene desselben. Bestimme die Lage des Angriffspunkes der Resultante R aus den Katheten $AC = a$ und $BC = b$ von C aus, wenn

1) $P = 28$; $P_1 = -48$; $P_2 = 60$; $a = 3$; $b = 4$
2) $P = 34$; $P_1 = 20$; $P_2 = 46$; $a = 6$; $b = 8$
3) $P = 52$; $P_1 = 28$; $P_2 = -32$; $a = 9$; $b = 12$

33. An den Endpunkten eines Rechteckes, dessen Seiten $AD = a$, $AB = b$ sind, wirken vier Gewichte. Welches ist die Lage des Angriffspunktes der Resultante R von A aus, wenn

1) $P = 14$; $P_1 = 18$; $P_2 = 24$; $P_3 = 8$; $a = 12$; $b = 18$
2) $P = 11$; $P_1 = 4$; $P_2 = 12$; $P_3 = 9$; $a = 12$; $b = 6$
3) $P = 12$; $P_1 = 16$; $P_2 = 26$; $P_3 = 3$; $a = 9$; $b = 5$

34. Ein Seil, welches in den Punkten A und B einer horizontalen Geraden festgemacht ist, trägt in C und D die Gewichte P und Q so, daß $CD \,\#\, AB$ und die Winkel α, β, welche AC und BD mit AB machen, sich zu 90^0 ergänzen, also $\alpha + \beta = 90^0$ ist. Welche Spannung S, S_1, S_2 erleiden AC, CD und BD, wenn

1)	2)	3)	4)
$P = 24$;	$P = 16{,}8$;	$P = 6$;	$P = 33{,}6$
$Q = 36$	$Q = 24$	$Q = 4{,}8$	$Q = 8{,}4$
$\sin\alpha = 0{,}6$	$\sin\alpha = 0{,}28$	$\sin\alpha = 0{,}8$	$\sin\alpha = 0{,}96$

IV. Gleichgewicht und Resultante beliebiger Kräfte in einer Ebene.

Vorerinnerung. Um die Richtung einer Kraft ohne Mißverständniß auszudrücken, bestimmen wir den Winkel, den die Kraft mit der *positiven Richtung* einer festen Geraden AX macht. Dieser Winkel hat einen Spielraum von o bis 360^0

und setzt voraus, daß jede Kraft nur der Größe nach, d. h. im absoluten Sinne genommen werde.

35. Welches ist der Angriffspunkt C, die Größe und Richtung der Resultante R zweier ebenen Kräfte P und Q, welche in A und B angreifen und mit der Geraden AB = a die Winkel α und β machen, wenn A Anfangspunkt und

1) $P = 5$; $\alpha = 180^0$; $Q = 12$; $\beta = 90^0$; $a = 6$
2) $P = 9$; $\alpha = 45_0$; $Q = 12$; $\beta = 135^0$; $a = 7$
3) $P = 10$; $\alpha = 60^0$; $Q = 6$; $\beta = 120^0$; $a = 8$
4) $P = 13$; $\alpha = 90^0$; $Q = 15$; $\beta = 270^0$; $a = 4$

36. Drei Kräfte P, P_1, P_2 wirken in der Ebene des Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten und bilden mit der Basis b beziehungsweise die Winkel α, β, γ, während die Basis b mit der Seite c den Winkel A einschließt. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, sowie die Lage des Angriffspunktes von A aus, wenn

1) $b = 12$; $c = 9$; $A = 60^0$
$\alpha = 0$; $\beta = 90^0$; $\gamma = 180^0$
$P = 9$; $P_1 = 8$; $P_2 = 15$
2) $b = 15$; $c = 8$; $A = 90^0$
$\alpha = 60^0$; $\beta = 240^0$; $\gamma = 120^0$
$P = 29$; $P_1 = 9$; $P_2 = 12$
2) $b = 9$; $c = 6$; $A = 120^0$
$\alpha = 180^0$; $\beta = 90^0$; $\gamma = 45^0$
$P = 16$; $P_1 = 16$; $P_2 = 8$

37. Drei Kräfte P, Q, R, welche in der Ebene des gleichseitigen Dreieckes ABC an dessen Eckpunkten sich Gleichgewicht halten, bilden mit der Basis AC = b beziehungsweise die Winkel α, β, γ. Welche Werte haben diese Winkel, wenn

1) $b = 6$; $P = 5$; $Q = 7$; $R = 9$
2) $b = 8$; $P = 8$; $Q = 9$; $R = 5$
3) $b = 10$; $P = 12$; $Q = 5$; $R = 7$

38. Drei Kräfte P, Q, R in einer Ebene, welche an den Punkten A, B, C einer Geraden angreifen, halten sich Gleichgewicht und bilden mit AB = a beziehungsweise die Winkel

α, β, γ. Bestimme R, ihren Richtungswinkel γ und die Lage von C, wenn

1) $a = 4$; $P = 8$; $\alpha = 60^0$; $Q = 5$; $\beta = 180^0$
2) $a = 5$; $P = 7$; $\alpha = 90^0$; $Q = 24$; $\beta = 0^0$
2) $a = 9$; $P = 12$; $\alpha = 20^0$; $Q = 9$; $\beta = 200^0$
4) $a = 9$; $P = 32$; $\alpha = 240^0$; $Q = 20$; $\beta = 120^0$

39. An den Eckpunkten der Diagonale AC eines Parallelogramms ABCD wirken P und P_2 längs AC in entgegengesetzter Richtung zu einander; desgleichen P_1 und P_3 in der Diagonale BD. Bestimme Größe und Richtung der Resultante, wenn die Diagonalen einen Winkel $= \varphi$ einschließen und

1) $P = 18$; $P_2 = 35$; $P_1 = 21$; $P_3 = 33$; $\varphi = 48^0$
2) $P = 25$; $P_2 = 41$; $P_1 = 32$; $P_3 = 19$; $\varphi = 129^0$
3) $P = 14$; $P_2 = 19$; $P_1 = 26$; $P_3 = 28$; $\varphi = 75^0$

40. In der Ebene eines gleichschenkeligen und rechtwinkeligen Dreieckes halten sich drei Kräfte P, Q, R an den Eckpunkten Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Hypotenuse, wenn

1) $P = 3$;	2) $P = 5$;	3) $P = 9$;	4) $P = 12$
$Q = 5$	$Q = 10$	$Q = 7$	$Q = 9$
$R = 7$	$R = 8$	$R = 3$	$R = 6$

41. Drei gleiche Kräfte halten sich an den Ecken eines Dreieckes ABC in dessen Ebene Gleichgewicht. Welche Winkel bilden sie mit der Seite $AC = b$, wenn

1) $a = 14$;	2) $a = 12$;	3) $a = 10$;	4) $a = 22$
$b = 20$	$b = 16$	$b = 20$	$b = 12$
$C = 60^0$	$C = 30^0$	$C = 135^0$	$C = 120^0$

V. Bestimmung des Schwerpunktes mit Anwendungen.

42. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines gleichschenkeligen Dreieckes von den drei Eckpunkten, wenn Seite und Basis

1) $a = 20$;	2) $a = 13$;	3) $a = 17$;	4) $a = 25$
$b = 24$	$b = 10$	$b = 16$	$b = 14$

43. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines rechtwinkeligen Dreieckes von den drei Eckpunkten, im Falle die beiden Katheten

1) $a = 30$;	2) $a = 48$;	3) $a = 54$;	4) $a = 42$
$b = 72$	$b = 90$	$b = 72$	$b = 144$

44. Berechne die Entfernung x, y des Schwerpunktes des Umfanges eines Dreieckes von den Seiten a und b, wenn

1) $a = 10$;	2) $a = 26$;	3) $a = 8$;	4) $a = 35$
$b = 21$	$b = 17$	$b = 15$	$b = 12$
$c = 17$	$c = 25$	$c = 17$	$c = 37$

45. Welche Entfernung vom Mittelpunkt eines Kreises hat der Schwerpunkt des Bogens des Centriwinkels $= \alpha$, wenn

1) $\alpha = 60^0$; 2) $\alpha = 90^0$; 3) $\alpha = 120^0$; 4) $\alpha = 240^0$

46. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines homogenen Dreieckes von der Basis b, wenn die Seiten

1) $a = 30$;	2) $a = 37$;	3) $a = 61$;	4) $a = 50$
$b = 28$	$b = 40$	$b = 36$	$b = 104$
$c = 26$	$c = 13$	$c = 65$	$c = 102$

47. Bestimme den Schwerpunkt eines Trapezes aus seinen parallelen Seiten a und b und deren senkrechten Abstand h, wenn

1) $a = 12$;	2) $a = 16$;	3) $a = 4$;	4) $a = 15$
$b = 18$	$b = 24$	$b = 10$	$b = 24$
$h = 5$	$h = 6$	$h = 7$	$h = 2{,}6$

48. Welche Entfernung vom Mittelpunkt hat der Schwerpunkt eines Segmentes, wenn der Centriwinkel des Bogens $= 60^0$ ist, im Falle $\pi = 3{,}14156$ und

1) $r = 2{,}17406$; 2) $r = 3{,}26109$; 3) $r = 4{,}34812$; 4) $r = 5{,}43515$

49. Welches ist die Entfernung des Schwerpunktes eines Ringes zweier konzentrischen Kreise von den Radien r und 2r vom Mittelpunkt, wenn der Centriwinkel $= 60^0$ ist und

1) $r = 3\pi$; 2) $r = 6\pi$; 3) $r = 3{,}6$; 4) $r = 5{,}4$

50. Wird einem gleichschenkeligen rechtwinkeligen Dreieck ein Kreis einbeschrieben, so hat der Schwerpunkt, der zwischen Kreis

und rechten Winkel enthaltenen Fläche vom Kreismittelpunkt eine Entfernung

$$x = \frac{2a(\sqrt{2} - 1)}{3(4 - \pi)},$$

wenn a die Kathete ist. Beweis!

51. Werden von einem Punkte A in einer Entfernung vom Mittelpunkt des Kreises AC = a zwei Tangenten AB und AD, sowie die Radien CB = CD = r gezogen, so hat der Schwerpunkt des Viereckes ABCD eine Entfernung von C

$$x = \tfrac{1}{3}\,\frac{a^2 + r^2}{a}.$$ Beweis!

52. Schneiden sich zwei excentrische Kreise, deren Mittelpunkte A und B sind, in den Punkten C und D so, daß $\angle$ CAD = 90° und $\angle$ CBD = 60° ist, so hat der Schwerpunkt des gemeinschaftlichen Segmentes eine Entfernung von A, wenn AC = r ist,

$$x = \frac{r(\sqrt{2} + \sqrt{3})(2\pi - 3\sqrt{3})}{7\pi - 6(1 + \sqrt{3})}.$$ Beweis!

53. Welche Entfernung hat der Schwerpunkt eines Tetraeders von jeder Seitenfläche, wenn die Kante

1) $a = 12\sqrt{6}$; 2) $a = 15,6$; 3) $a = 4,8$; 4) $a = 3,6$

54. Bezeichnet a die Kante eines regulären Polyeders, so hat der Schwerpunkt von jedem Ecke eine Entfernung

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{6}$$ im Tetraeder,

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$ im Hexaeder,

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$ im Oktaeder,

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}$$ im Dodekaeder,

$$x = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$ im Ikosaeder. Beweis!

55. Bestimme die Lage des Schwerpunktes einer abgekürzten Pyramide aus den parallelen Grundflächen G, g und ihrem Abstande h, wenn

1) $G = 36$;	2) $G = 32$;	3) $G = 12$;	4) $G = 50$
$g = 16$	$g = 18$	$g = 3$	$g = 18$
$h = 7{,}6$	$h = 7{,}4$	$h = 14$	$h = 19{,}6$

56. Bestimme die Lage des Schwerpunktes eines abgekürzten Kegels aus den Radien R, r der parallelen Grundflächen und ihrem Abstand h, wenn

1) $R = 5$;	2) $R = 9$;	3) $R = 10$;	4) $R = 12$
$r = 3$	$r = 5$	$r = 6$	$r = 6$
$h = 9{,}8$	$h = 6{,}04$	$h = 4{,}9$	$h = 6{,}3$

57. Zwei homogene gleichdichte Kugeln mit den Radien R und r sind in ihren Mittelpunkten A und B durch eine feste Gerade $AB = a$ zu einem System verbunden. Wo liegt der gemeinsame Schwecpunkt, wenn

1) $R = 31$;	2) $R = 41$;	3) $R = 15$;	4) $R = 19$
$r = 3$	$r = 2{,}5$	$r = 4$	$r = 5$
$a = 125$	$a = 250$	$a = 204$	$a = 30$

58. Bestimme die Entfernung des Schwerpunktes der beiden Sektoren einer Kugel vom Mittelpunkte, wenn R und r die Radien der Kugel und des Kugelkreises sind, im Falle

1) $R = 52$;	2) $R = 40$;	3) $R = 60$;	4) $R = 68$
$r = 20$	$r = 32$	$r = 36$	$r = 32$

59. Bestimme die Entfernung des Schwerpunktes beider Kugelsegmente vom Mittelpunkt, wenn r der Kugelradius und a der Abstand der Schnittfläche vom Centrum ist, falls

1) $r = 14$;	2) $r = 10$;	3) $r = 8$;	4) $r = 12$
$a = 2$	$a = 5$	$a = 4$	$a = 6$

60. Sind a, b, c die Seitenkanten d, e, f die Grundkanten einer dreiseitigen Pyramide, so ist die Entfernung des Schwerpunktes von der Spitze ausgedrückt durch

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - d^2 - e^2 - f^2}.$$ Beweis!

61. Wird ein Cylinder von der Höhe h von oben nach unten konisch ausgebohrt, so daß der Kegel seine Spitze im Mittelpunkt der unteren Basis des Cylinders und mit dem Cylinder gleiche Basis hat, so beträgt die Entfernung des Schwerpunktes des Hohlkörpers von der unteren Basis

$$x = \frac{3}{8} h. \quad \text{Beweis!}$$

62. Wird in derselben Weise wie vorhin ein abgekürzter Kegel von den Radien R und r konisch ausgebohrt, so hat der Schwerpunkt des Hohlkörpers eine Entfernung

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R + 2r}{R + r}. \quad \text{Beweis!}$$

63. Wird in derselben Weise ein abgekürzter Kegel cylindrisch ausgebohrt, so ist wie vorhin

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R + 3r}{R + 2r}. \quad \text{Beweis!}$$

64. Wird ein abgekürzter Kegel konisch ausgebohrt, so daß der Kegel seine Spitze im Mittelpunkte des Kreises R und eine Basis vom Radius = r hat, so ist der Abstand des Schwerpunktes des Hohlkörpers vom Kreise R

$$x = \frac{h}{4} \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 2r^2}{R^2 + Rr}. \quad \text{Beweis!}$$

65. Wird ein vertikal stehender massiver Cylinder von einer horizontalen Kraft P in einer Höhe = h angegriffen, so besteht Gleichgewicht, d. h. der Cylinder wird nicht umgeworfen, so lange

$$h \cdot P \leq r \cdot Q$$

ist, worin r den Radius und Q das Gewicht des Cylinders bezeichnet. Beweis!

66. Das Nämliche gilt vom Kegel und Kegelstumpf. Beweis!

67. Die kreisrunde Platte eines Tisches ruht im Centrum auf einem Gestelle, dessen Basis gleichfalls kreisrund ist. Welche Belastung P kann der Tisch in seinem Rande noch tragen, ohne umzufallen, wenn Q sein Gewicht, R und r die Radien der beiden Kreisflächen sind?

68. Eine Leiter vom Gewichte Q ruht mit ihrem oberen Ende auf einer schiefen Ebene von 60^0 Neigung, mit ihrem unteren auf einer glatten horizontalen Ebene. Welche horizontale Kraft P hindert die Leiter am Gleiten, wenn sie gegen den Horizont eine Neigung $= 30^0$ hat?

69. Eine Kugel vom Gewichte Q ruht auf zwei geneigten Ebenen von der Neigung α und β. Welchen Druck D und D_1 übt sie auf jede Ebene aus?

70. Ein schwerer homogener Stab vom Gewichte Q ruht in seinen Endpunkten auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Bestimme den Druck D und D_1 auf die Ebenen und die Lage des Gleichgewichts.

71. Ein homogener Stab vom Gewichte R wird mittelst Leitrollen von den Gewichten P und Q in horizontaler Lage getragen. Welche Winkel α und β machen P und Q mit dem Stabe, wenn Gleichgewicht stattfindet?

72. Ein homogener Stab $AB = a$ vom Gewichte Q stützt sich in seinem unteren Endpunkte A gegen eine vertikale Ebene, ruht in C auf einem festen Punkte und trägt in B ein Gewicht $= P$. Bestimme $AC = x$ und den Neigungswinkel α, welchen AB mit dem Horizont machen muß, damit Gleichgewicht stattfinde, wenn der senkrechte Abstand von $C = b$ ist?

73. Ein homogenes Trapez vom Gewichte Q ruht mit seinen parallelen Seiten a und b auf zwei glatten schiefen Ebenen von der Neigung α und β. Welches ist der Neigungswinkel γ des Trapezes gegen den Horizont im Zustande des Gleichgewichts, wenn h die Höhe des Trapezes ist?

74. Im Innern einer Hohlkugel ruht eine homogene Platte vom Gewichte Q und der Form eines gleichschenkeligen Dreieckes. Bestimme den Winkel α, welchen das Dreieck mit dem Horizont macht aus der Seite a, Höhe h und dem Kugelradius r.

VI. Gleichgewicht an Maschinen.

a) Mathematischer Hebel.

75. Ein zweiarmiger Hebel AB trägt an dem einen Arm = a ein Gewicht P und an dem andern = b ein Gewicht Q. Bestimme Q und den Druck D auf den Stützpunkt, wenn

1) $P = 60$;	2) $P = 150$;	3) $P = 37\frac{1}{2}$;	4) $P = 35$
$a = 6$	$a = 5\frac{1}{3}$	$a = 7{,}5$	$a = 3{,}2$
$b = 3\frac{1}{3}$	$b = 4\frac{1}{6}$	$b = 2{,}5$	$b = 0{,}5$

76. An dem Endpunkte des einarmigen horizontalen Hebels AB = a hält eine vertikale Kraft P der Last Q Gleichgewicht. Bestimme den Angriffspunkt C der Last und den Druck D, wenn

1) $P = 18{,}5$;	2) $P = 24{,}4$;	3) $P = 12{,}5$;	4) $P = 22{,}8$
$Q = 55{,}5$	$Q = 73{,}2$	$Q = 63{,}5$	$Q = 114$
$a = 3{,}9$	$a = 4{,}5$	$a = 3{,}5$	$a = 1{,}5$

77. Ein Hebel AB = a trägt an seinen Endpunkten die Gewichte P und Q im Gleichgewicht. Wo liegt der Stützpunkt C, wenn

1) $P = 45$;	2) $P = 34{,}5$;	3) $P = 28{,}4$;	4) $P = 52{,}5$
$Q = 20{,}7$	$Q = 27{,}6$	$Q = 35{,}5$	$Q = 45{,}5$
$a = 7{,}3$	$a = 5{,}4$	$a = 4{,}5$	$a = 5{,}6$

78. Die zwei Arme eines Hebels, welche sich wie a : b verhalten, tragen an ihren Endpunkten zusammen eine Last Q im Gleichgewicht. Wie viel Gewicht trägt jeder, wenn

1) $Q = 62{,}7$;	2) $Q = 49{,}2$;	3) $Q = 153$	4) $Q = 265$
$a = 2{,}3$	$a = 1{,}7$	$a = 2{,}6$	$a = 2{,}8$
$b = 3{,}4$	$b = 2{,}4$	$b = 1{,}9$	$b = 2{,}5$

79. An einem horizontalen gewichtlosen Stabe AB ist im Punkte C eine Last Q so aufgehängt, daß die Proportion AC : BC = a : b stattfindet. Wie groß ist der Druck in A und B, wenn

1) $a = 1{,}9$;	2) $a = 2{,}3$;	3) $a = 0{,}95$;	4) $a = 2{,}45$
$b = 2{,}4$	$b = 3{,}5$	$b = 1{,}43$	$b = 1{,}13$
$Q = 64{,}5$	$Q = 52{,}2$	$Q = 119$	$Q = 179$

80. An einem horizontalen, in A und B unterstützten Stab von der Länge AB = 2 sind in C und D die Gewichte P = 24 und Q = 50 Kilogramm angebracht. Bestimme den Druck in A und B, wenn

1) AC = 0,5;	2) AC = 0,6;	3) AC = 0,8	4) AC = 0,9
AD = 1,2	AD = 1,3	AD = 1,5	AD = 1,4

81. An einer unrichtigen Krämerwage wiegt ein Gegenstand P Kilogramm in der einen Wagschale, dagegen Q Kilogramm in der andern. Welches ist das wahre Gewicht G, wenn

1) $P = 2\frac{5}{8}$;	2) $P = 3\frac{3}{8}$	3) $P = 18\frac{3}{4}$	4) $P = 11\frac{1}{4}$	5) $P = 13\frac{1}{3}$
$Q = 3\frac{3}{7}$	$Q = 2\frac{2}{3}$	$Q = 16\frac{1}{3}$	$Q = 8\frac{8}{9}$	$Q = 16\frac{7}{8}$

82. Eine empfindliche gemeine Wage gibt bei einem Uebergewicht von 7 Milligramm einen Ausschlagwinkel = 9^0. Bei welchem Uebergewicht q ist der Ausschlagwinkel = β, wenn

1) $\beta = 3^0$; 2) $\beta = 2^0$; 3) $\beta = 1^0$; 4) $\beta = \frac{1}{2}^0$

83. In der Wagschale einer Decimalwage hält ein Körper P dem Q Gleichgewicht auf der Brücke; bringt man aber Q in die Wagschale und P auf die Brücke, so sind p Kilogramm auf die Brücke zu legen, wenn Gleichgewicht eintreten soll. Welches Gewicht hat P und Q, wenn

1) p = 99; 2) p = 198; 3) p = 396; 4) p = 792

84. Ein rechtwinkeliger Hebel ACB, welcher im Scheitel C um eine horizontale Achse drehbar ist, trägt in A und B die Gewichte P und Q im Gleichgewicht. Bestimme die Winkel α und β, welche AC = 4 und BC = 5 mit dem Horizont machen, wenn

1) P = 4,65;	2) P = 3,65;	3) P = 7,28;	4) P = 8,63
Q = 3,72	Q = 4,32	Q = 6,45	Q = 6,72

b) physischer Hebel.

85. Ein prismatischer homogener Stab AB = a wiegt 1,6 Kilogramm und trägt an seinen Endpunkten A und B die Gewichte P und Q und hat seinen Unterstützungspunkt in C. Bestimme Q für den Fall des Gleichgewichts, wenn

1) $P = 16$; 2) $P = 24$; 3) $P = 14$; 4) $P = 9{,}5$
$a = 4{,}2$ $a = 3{,}8$ $a = 2{,}8$ $a = 3{,}2$
$AC = 2{,}6$ $AC = 2{,}2$ $AC = 1{,}2$ $AC = 1{,}6$

86. Bestimme in der vorigen Aufgabe AC, wenn
1) $P = 8{,}8$; 2) $P = 11{,}2$; 3) $P = 13{,}2$; 4) $P = 9{,}2$
$Q = 9{,}6$ $Q = 17{,}2$ $Q = 15{,}2$ $Q = 19{,}2$
$a = 2{,}5$ $a = 4{,}5$ $a = 3$ $a = 3{,}6$

87. Ein prismatischer homogener Hebel $AB = a$ vom Gewichte p kann sich in A in einer festen Charnier frei bewegen und soll durch eine in B angreifende Kraft P horizontal getragen werden. Welchen Winkel α macht P mit dem Horizont, wenn
1) $P = 5{,}9$; 2) $P = 25{,}4$; 3) $P = 7{,}18$; 4) $P = 9{,}72$
$p = 5{,}9$ $p = 39{,}6$ $p = 11{,}9$ $p = 13{,}85$

88. Bestimme in der vorigen Aufgabe das Gewicht p, wenn
1) $P = 6{,}72$; 2) $P = 31{,}8$; 3) $P = 16{,}17$; 4) $P = 15{,}88$
$\alpha = 25^\circ 9'$ $\alpha = 75^\circ 31'$ $\alpha = 62^\circ 41'$ $\alpha = 47^\circ 33'$

89. Welches ist in den beiden vorhergehenden Aufgaben der horizontale und vertikale Widerstand R, R_1 des Gewindes?

90. An einer horizontalen cylindrischen Stange, welche 6 Meter lang und 24 Kilogramm schwer ist, in A und B auf Lagern ruht, ist in C ein Gewicht $Q = 192$ Kilogramm angebracht. Bestimme den Druck D in A, sowie AC aus dem Druck D_1 in B, wenn
1) $D_1 = 76$; 2) $D_1 = 108$; 3) $D_1 = 140$; 4) $D_1 = 172$.

91. Welchen Druck bringt das Gewicht $P = 8$ Kilogramm im Punkt A des Hebels $AB = a$ Centimeter auf ein Sicherheitsventil in Q hervor, wenn $p = 1{,}6$ Kilogramm das Gewicht und $BD = 20^{cm}$ die Entfernung des Schwerpunktes D vom Drehpunkt B des Hebels bezeichnet, falls
1) $a = 22$; 2) $a = 41$; 3) $a = 26$; 4) $a = 25{,}7^{cm}$
$BC = 4$ $BC = 6$ $BC = 5$ $BC = 4{,}4^{cm}$

c) Rad an der Welle.

92. Welche Kraft P hält an einem Haspel (Fig. 25 § 95) einer Last Q Gleichgewicht, wenn a die Länge der Kurbel und r der Radius der Welle in Centimetern ist, falls

1) Q = 86;	2) Q = 208;	3) Q = 195;	4) Q = 210
a = 9,0	a = 12	a = 15	a = 14
r = 2,7	r = 3	r = 2,8	r = 2,4

93. Welche Kraft P hält an einer Winde (§ 99) einer Last Q Gleichgewicht, wenn R der Radius des Rades, r jener der Radwelle, r_1 jener der Kurbelwelle und a die Kurbellänge in Centimeter ist, falls

1) R = 8; r = 2,8; r_1 = 3; a = 14; Q = 512
2) R = 7,5; r = 3,5; r_1 = 2,7; a = 19; Q = 475
3) R = 12,4; r = 3,2; r_1 = 3,2; a = 16; Q = 744
4) R = 13,5; r = 2,5; r_1 = 3; a = 15; Q = 648

94. Wie groß ist in der vorigen Aufgabe der Radius des Rades zu nehmen, wenn ein mittlerer Mann (= 50 Kilogr.) einer Last Q Gleichgewicht halten soll, falls

1) Q = 540; r = 4,0; r_1 = 3 ; a = 12
2) Q = 780; r = 3,5; r_1 = 4 ; a = 13
3) Q = 1680; r = 2,5; r_1 = 3,2; a = 14
4) Q = 1305; r = 4,5; r_1 = 5 ; a = 15

95. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst eines Bauaufzuges (§ 100) heben, wenn

1) R = 17,4; r = 3,2; r_1 = 2,9; a = 37 cm
2) R = 12,4; r = 3,5; r_1 = 3,1; a = 28 „
3) R = 14,8; r = 4,0; r_1 = 3,7; a = 27,2 „

96. In welchem Verhältniß steht die Kraft P zur Last Q, wenn an einem Krahn die Radien der drei Wellen r = r_1, = r_2, so wie R = R_1 = a und außerdem die Kurbelwelle mit 12 und das davon getriebene Rad mit 114 Zähnen versehen ist?

97. Welche Kraft P hält an einer Kraftrolle der Last Q Gleichgewicht, wenn das Seil den n^{ten} Teil des Umfanges der Rolle berührt, im Falle

1) $Q = 218$; 2) $Q = 97$; 3) $Q = 320$; 4) $Q = 184$
$n = \frac{1}{3}$ $n = \frac{1}{4}$ $n = \frac{1}{5}$ $n = \frac{1}{6}$

98. An einem Flaschenzuge (§ 97) trägt die bewegliche Flasche n Rollen. Welche Kraft P wird der Last Q Gleichgewicht halten, wenn

1) $Q = 216$; 2) $Q = 512$; 3) $Q = 625$; 4) $Q = 468$
$n = 3$ $n = 4$ $n = 5$ $n = 6$

99. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst eines Flaschenzuges heben, wenn das Seil 10 und die untere Flasche 16 Kilogramm wiegt, falls

1) $n = 3$; 2) $n = 5$; 3) $n = 12$; 4) $n = 8$

100. Wieviele Arbeiter sind nötig, um mit dem vorigen Flaschenzug eine Last Q zu heben, wenn

1) $Q = 284$; 2) $Q = 784$; 3) $Q = 384$; 4) $Q = 484$
$n = 3$ $n = 4$ $n = 2$ $n = 5$

101. Ein Potenzflaschenzug (§ 98) bestehe aus n beweglichen Rollen; welche Kraft P hält der Last Q Gleichgewicht, wenn jede Rolle 3 Kilogramm wiegt und

1) $Q = 91$; 2) $Q = 415$; 3) $Q = 2355$; 4) $Q = 5347$
$a = 2$ $n = 3$ $n = 4$ $n = 5$

102. Welche Last Q kann ein mittlerer Mann mittelst des vorigen Zuges heben, wenn

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$

103. Wieviele Rollen muß ein Potenzflaschenzug haben, damit ein mittlerer Mann die Last Q heben kann, wenn jede Rolle 3 Kilogramm wiegt und

1) $Q = 1600$; 2) $Q = 6400$; 3) $Q = 832$

d) Schiefe Ebene, Keil und Schraube.

104. Die Basis einer schiefen Ebene sei mit b (§ 102), die Höhe mit h und ihre Neigung gegen den Horizont mit α bezeichnet. Welche Kraft P hält der Last Q auf einer schiefen Ebene Gleichgewicht, wenn P 1) der schiefen Ebene, 2) der Basis derselben $\parallel$ wirkt, im Falle

1) $Q = 640$; 2) $Q = 312$; 3) $Q = 600$; 4) $Q = 408$
$h = 6$ $h = 5$ $h = 7$ $h = 15$
$b = 8$ $b = 12$ $b = 24$ $b = 8$

105. Wie groß ist in der vorhergehenden Aufgabe der Druck D auf die schiefe Ebene?

106. Welche Kraft P hält der Last Q auf einer schiefen Ebene Gleichgewicht, sowohl wenn P der schiefen Ebene, als auch der Basis ‖ ist, im Falle
1) $Q = 351{,}6$; 2) $Q = 492{,}5$; 3) $Q = 590{,}7$; 4) $Q = 729{,}6$
$\alpha = 15^\circ 27'$ $\alpha = 23^\circ 41'$ $\alpha = 19^\circ 45'$ $\alpha = 17^\circ 39'$

107. Welchen Druck hat die Ebene in jedem Falle der vorhergehenden Aufgabe auszuhalten?

108. Welchen Wert nimmt P und D in der Aufg. 106 an, wenn die Richtung von P mit der schiefen Ebene einen Winkel $\beta = + 3^0 25'$, oder $\beta = - 3^0 25'$ macht?

109. Eine Kraft P, deren Richtung der schiefen Ebene ‖ ist, hält einer Last Q Gleichgewicht. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D auf die schiefe Ebene, wenn
1) $P = 47{,}8$; 2) $P = 395{,}9$; 3) $P = 531{,}6$; 4) $P = 627{,}5$
$\alpha = 9^0 26'$ $\alpha = 7^0 32'$ $\alpha = 15^0 22'$ $\alpha = 13^0 52'$

110. Wie groß ist die Last Q und ihr Druck D, wenn in der vorigen Aufgabe die Kraft der Basis ‖ wirkt?

111. Wie groß ist die Neigung einer schiefen Ebene, auf welcher eine Last Q von einer zur schiefen Ebene parallelen Kraft P im Gleichgewicht gehalten wird, wenn
1) $P = 57{,}8$; 2) $P = 129{,}4$; 3) $P = 85{,}3$; 4) $P = 141{,}8$
$Q = 138{,}6$ $Q = 320{,}5$ $Q = 157{,}4$ $Q = 357{,}8$

112. Eine Last Q, welche von einer Kraft P auf einer schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten wird, übt einen Druck = D auf die Ebene. Wie groß ist P und Q, wenn P der schiefen Ebene ‖ wirkt und
1) $D = 83{,}5$; 2) $D = 122{,}8$; 3) $D = 95{,}8$; 4) $D = 72{,}4$
$\alpha = 14^0 31'$ $\alpha = 21^0 27'$ $\alpha = 17^0 14'$ $\alpha = 19^0$

113. Wieviele Arbeiter können einen schweren Wagen vom Gewichte Q auf einer schiefen Ebene, deren Steigung beziehungsweise Gefäll = a, am Herablaufen hindern, wenn

1) $Q = 4200$; 2) $Q = 7500$; 3) $Q = 6800$; 4) $Q = 6500$
$\alpha = 0{,}02$ $\alpha = 0{,}03$ $\alpha = 0{,}034$ $\alpha = 0{,}039$

114. Ein schwerer Körper Q wird auf einer schiefen Ebene von drei gleichen Kräften $= \frac{1}{3}Q$, welche horizontal, vertikal und der schiefen Ebene parallel wirken, im Gleichgewicht gehalten. Welches ist die Neigung α der Ebene?

115. Auf einer schiefen Ebene wird ein schwerer Körper Q sowohl von einer Kraft P ‖ der Basis als auch von P_1 ‖ der schiefen Ebene im Gleichgewicht gehalten. Bestimme Q aus P und P_1.

116. Zwei Kräfte P und P_1, welche einer schiefen Ebene und ihrer Basis beziehungsweise parallel wirken, halten auf der schiefen Ebene Q im Gleichgewicht. Bestimme den Druck D, sowie $tg\,\frac{1}{2}\alpha$ oder $\cos\alpha$ des Neigungswinkels, wenn $P = P_1 = \frac{1}{n}Q$, falls

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$

117. Bestimme den Druck D und $tg\,\frac{1}{2}\alpha$ in Aufgabe 114 unter der Bedingung, daß $P = P_1 = P_2 = \frac{1}{n}Q$, falls

1) $n = 7$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$; 4) $n = 6$

118. Ein freihängendes Gewicht Q hält dem Gewichte P mittelst eines über eine Leitrolle in D geführten Fadens auf einer schiefen Ebene LM von der Neigung α Gleichgewicht. Bestimme den Winkel β, welchen der Faden DP mit LM macht, sowie den Druck D, welchen P auf LM ausübt, aus den Größen P, Q und a.

119. Eine Last Q soll mit Hülfe eines Haspels, dessen Kurbel = 48 und Wellenradius = 8 Centimeter ist, über eine

schiefe Ebene von der Neigung $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ gezogen werden. Bestimme die hiezu nötige Kraft P, wenn

1) Q = 336; 2) Q = 360; 3) Q = 420; 4) Q = 960

120. Ein vertikal stehender eingeklemmter gleichschenkeliger Keil von der Breite = b und Länge = h Centim. trägt auf seinem Rücken eine Last = Q Kilogramm im Gleichgewicht. Wie groß ist der normale Seitendruck D, im Falle

1) Q = 390;	2) Q = 240;	3) Q = 510;	4) Q = 266
b = 2,6	b = 3,0	b = 3,4	b = 3,8
h = 8,4	h = 11,2	h = 14,4	h = 18,0

121. Wie groß ist der normale Seitendruck D, wenn in der vorigen Aufgabe der Reibungscoeffizient f = 0,25 und der Keil als größte Belastung Q Kilogramm zu tragen vermag, im Falle

1) Q = 2040; 2) Q = 1376; 3) Q = 3180; 4) Q = 1792

122. Zwischen zwei vertikale, auf einander ruhende Säulen wird ein gleichschenkeliger Keil von der Breite = b und Länge = h Centim. horizontal eingetrieben. Welche Kraft P ist zum Eintreiben erforderlich, wenn der Reibungscoeffizient f = 0,25 und der Gesammtdruck = D ist, im Falle

1) D = 7225;	2) D = 12769;	3) D = 21025;	4) D = 32761
b = 2,6	b = 3,0	b = 3,4	b = 3,8
h = 8,4	h = 11,6	h = 14,4	h = 18,0

123. Bei welchem Reibungscoeff. f würde in der vorigen Aufgabe der Keil dem Drucke nachgeben und zurückweichen?

124. Welchen Druck D kann ein mittlerer Mann (50 Kilogr.) mit einer Schraube, deren Gangweite = h und Spindelradius = r Centimeter ist, hervorbringen, wenn die Spindel mit einem Hebelarm = a Centim. gedreht wird, im Falle

1) h = 1,2;	2) h = 0,9;	3) h = 0,9;	4) h = 0,6
r = 2,5	r = 2,8	r = 2,7	r = 1,8
a = 48	a = 42	a = 45	a = 27

125. Wie groß berechnet sich in der vorigen Aufgabe der Druck D, wenn der Reibungscoeffizient $f = 0,2$ gesetzt wird.

B. Aufgaben aus der Dynamik.

I. Gleichförmige Bewegung.

1. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilwagens, welcher s Kilometer in n Minuten zurücklegt, falls

1) $s = 6,6$;	2) $s = 5,52$;	3) $s = 6,48$;	4) $s = 8,1$
$n = 50$	$n = 40$	$n = 45$	$n = 54$

2. Welches ist die mittlere Stromgeschwindigkeit eines Flusses, wenn ein darin schwimmender Körper in n Minuten s Kilometer zurücklegt, falls

1) $n = 20$;	2) $n = 30$;	3) $n = 25$;	4) $n = 15$
$s = 1,44$	$s = 1,62$	$s = 2,25$	$s = 0,72$

3. Welches ist die lineare und welches die Winkelgeschwindigkeit v und ω eines Rades vom Radius $= r$ Meter, wenn sich dasselbe in 1 Minute 24mal umdreht, falls

1) $r = 1,5$; 2) $r = 0,75$; 3) $r = 1,2$; 4) $r = 2,5$

4. Welches ist die mittlere Geschwindigkeit eines Eilzuges, welcher s Kilometer in 10 Minuten zurücklegt, wenn

1) $s = 9,6$; 2) $s = 7,2$; 3) $s = 8,08$; 4) $s = 7,5$

5. Wann und wo decken sich Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr?

6. In A geht ein gemischter Zug ab mit einer Geschwindigkeit $= 7,8$ Meter und nach 3 Stunden ein Eilzug, welcher ersteren in n Stunden einholen soll. Bestimme seine Geschwindigkeit v, wenn

1) $n = 6$; 2) $n = 7,5$; 3) $n = 8$; 4) $n = 7,2$

7. In A und B gehen gleichzeitig zwei Bahnzüge mit einer Geschwindigkeit von 8 und 12 Meter gegen einander ab. Nach welcher Zeit t werden sie sich begegnen, wenn die Entfernung $AB = s$ Kilometer, falls

1) $s = 396$; 2) $s = 360$; 3) $s = 252$; 4) $s = 216$

8. Welche Entfernung s hat in der vorhergehenden Aufgabe A von B, wenn die Züge in t Stunden sich begegnen, falls

1) $t = 3{,}5$; 2) $t = 3{,}8$; 3) $t = 4{,}2$; 4) $t = 4{,}5$

9. In A geht ein Güterzug ab mit einer Geschwindigkeit = 8 Meter, $2\frac{1}{2}$ Stunden später in B ein Eilzug, welcher ersterem nach t Stunden begegnet. Bestimme die Geschwindigkeit v des letzteren aus AB = s Kilom., falls

1) $s = 252$;	2) $s = 216$;	3) $s = 288$;	4) $s = 324$
$t = 2{,}5$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 3{,}5$

10. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von der Sonne zur Erde, wenn die Geschwindigkeit des Lichtes 40000 und die Entfernung der Erde von der Sonne = 21 Millionen Meilen ist?

11. Wie lange braucht ein Lichtstrahl von einem Fixstern zur Erde, wenn er n mal 21 Millionen Meilen entfernt ist, falls

1) $n = 36000$; 2) $n = 54000$; 3) $n = 72000$; 4) $n = 90000$

12. Ein Dampfboot hat stromabwärts eine Geschwindigkeit = v_1 und stromaufwärts = v_2 Fuß. Bestimme die Stromgeschwindigkeit v des Flusses, sowie die Geschwindigkeit v′ der Dampfkraft, falls

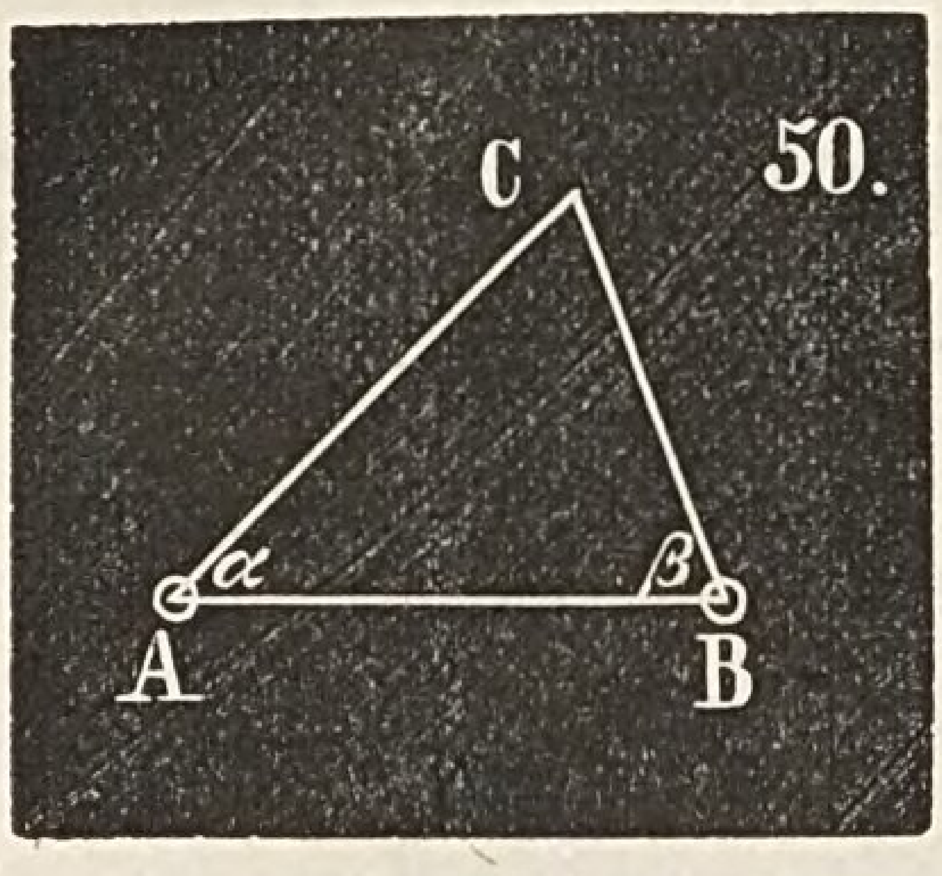
1) $v_1 = 16$;	2) $v_1 = 17$;	3) $v_1 = 18$;	4) $v_1 = 19$
$v_2 = 8$	$v_2 = 7$	$v_2 = 8$	$v_2 = 9$

13. Ein Kahn sucht mit einer Geschwindigkeit = 6 Fuß senkrecht zur Strömung das jenseitige Ufer eines b Fuß breiten Stromes zu gewinnen. Welches ist die Stromgeschwindigkeit v, wenn der Kahn bei der Landung s Fuß abwärts getrieben wurde, falls

1) $b = 3120$;	2) $b = 2500$;	3) $b = 3580$;	4) $b = 3500$
$s = 1040$	$s = 1000$	$s = 1790$	$s = 2100$

14. Ein Dampfboot hat stromabwärts eine Geschwindigkeit = $6{,}6^m$. In welcher Richtung zur Strömung muß dasselbe steuern, wenn es in t Sekunden eine Strombreite = 174^m gewinnen will, im Falle

1) $t = 240$; 2) $t = 290$; 3) $t = 320$; 4) $t = 420$



15. Zwei Punkte A und B (Fig. 50), welche eine Entfernung AB = b haben, bewegen sich in der Richtung AC und BC mit der Geschwindigkeit v und v_1. Bestimme v_1 und die Zeit t, in der sie sich in C begegnen, wenn

1) v = 25*; b = 7480; $\alpha = 67°$; $\beta = 79°30'$
2) v = 37 ; b = 8590; $\alpha = 90°$; $\beta = 71°42'$
3) v = 48 ; b = 9260; $\alpha = 73°$; $\beta = 69°53'$

16. Während ein Punkt mit der Geschwindigkeit v von A nach B gelangt, bewegt sich in einer auf AB senkrechten Geraden CA gleichzeitig ein anderer Punkt von C nach D mit der Geschwindigkeit v_1. Sei Winkel ABC = 68° und ADB = β, wie groß berechnet sich Winkel β, unter welchem Punkt D von B aus gesehen wird, wenn

1) v = 3200; v_1 = 6400; 2) v = 3600; v_1 = 9000; 3) v = 708; v_1 = 1200; 4) v = 1300; v_1 = 9100

II. Gleichförmig beschleunigte Bewegung.**

17. Bestimme die Endgeschwindigkeit v und den Fallraum s, den ein freifallender Körper in t Sekunden zurücklegt, wenn g = 9,8 und

1) t = 4,5; 2) t = 5,8; 3) t = 6,5; 4) t = 8

18. In welcher Zeit t und mit welcher Endgeschwindigkeit v fällt ein Körper von der Höhe h, wenn g = 9,8 und

1) h = 78,4; 2) h = 490; 3) h 313,6; 4) h = 1960

---

* Ueberall, wo die Längeneinheit nicht beigesetzt ist, soll der Meter genommen werden.

** Als Beschleunigung wird $g = 9{,}80896^{m}$ vorausgesetzt, so lange nicht ein andrer Wert angegeben ist.

19. Ein Körper hat im freien Fall eine Geschwindigkeit $= v$ erlangt; welchen Wert hat h und t, wenn $g = 9{,}8$ und
1) $v = 19{,}6$; 2) $v = 49$; 3) $v = 39{,}2$; 4) $v = 58{,}8$

20. Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper fällt nach t Sekunden zur Erde; welches ist die erlangte Höhe h und welches die Wurfgeschwindigkeit v, wenn $g = 9{,}8$ und
1) $t = 12$; 2) $t = 16$; 3) $t = 20$; 4) $t = 24$

21. Mit welcher Geschwindigkeit v muß ein Körper senkrecht in die Höhe geworfen werden, um die Höhe h zu erreichen, wenn $g = 9{,}8$ und
1) $h = 160$; 2) $h = 250$; 3) $h = 360$; 4) $h = 490$

22. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v senkrecht in die Höhe geworfen. Wie hoch steigt er und in welcher Zeit t fällt er zur Erde, wenn $g = 9{,}8$ und
1) $v = 147$; 2) $v = 198$; 3) $v = 245$; 4) $v = 294$

23. In welcher Zeit und mit welcher Endgeschwindigkeit rollt eine Kugel von der Ruhe aus mit einer Beschleunigung $= a$ über eine schiefe Ebene von der Länge $= s$, und welche Neigung α hat die Ebene gegen den Horizont, wenn $g = 9{,}8^m$ und
1) $a = 2{,}8$; 2) $a = 4{,}2$; 3) $a = 4{,}9$ 4) $a = 7$
$s = 315$ $s = 840$ $s = 2205$ $s = 2016$

24. Welche Steigung und Länge hat eine schiefe Ebene, über welche eine Kugel mit der Beschleunigung a in der Zeit t rollt, und welche Geschwindigkeit hat sie erlangt, wenn $g = 9{,}8^m$ und
1) $a = 2{,}8$; 2) $a = 4{,}2$; 3) $a = 5{,}6$; 4) $a = 3{,}5$
$t = 25$ $t = 35$ $t = 45$ $t = 52$

25. Mit welcher Beschleunigung und in welcher Zeit rollt eine Kugel über eine schiefe Ebene von der Länge s und der Neigung α, wenn $g = 9{,}8^m$ und
1) $s = 551{,}25$; 2) $s = 267{,}75$; 3) $s = 1183$; 4) $s = 3430$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{3}{14}$ $\sin\alpha = \frac{5}{14}$ $\sin\alpha = \frac{4}{7}$

26. Eine Kugel rollt über eine schiefe Ebene AB, deren Höhe $AC = 176{,}4^m$ ist, in der Zeit t von A nach B abwärts;

in welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit kommt sie von A nach D, dem Fußpunkte des Lotes $CD \perp AB$, im Falle $g = 9{,}8^{m}$ und

1) $t = 8$; 2) $t = 10$; 3) $t = 12$; 4) $t = 15$

27. In welcher Zeit t und mit welcher Geschwindigkeit v kommt in der vorhergehenden Aufgabe die Kugel von A nach B, wenn sie von D bis B noch die Zeit t_1 braucht, falls g und h unverändert bleibt und

1) $t_1 = 2$; 2) $t_1 = 3$; 3) $t_1 = 4$; 4) $t_1 = 5$

28. Welches ist die Neigung einer schiefen Ebene, wenn eine über sie rollende Kugel n mal soviel Zeit braucht, als im freien Fall von ihrer Höhe h, falls

1) $n = 2$; 2) $n = 3$; 3) $n = 4$; 4) $n = 5$

29. In welcher Höhe h über dem Horizont fängt eine Kugel über eine schiefe Ebene von der Neigung α zu rollen an, wenn sie in der Zeit t unten ankommt, im Falle

1) $\alpha = 25^0 32'$; 2) $\alpha = 22^0 50'$; 3) $\alpha = 20^0 45'$; 4) $\alpha = 18^0$
$t = 8{,}7$ $t = 9{,}24$ $t = 10{,}8$ $t = 12$

30. Mit welcher Geschwindigkeit muß eine Kugel längs einer schiefen Ebene von der Neigung α geworfen werden, damit sie eine Länge $= s$ erreiche und von da in derselben Geraden umkehre, im Falle

1) $\alpha = 29^0 15'$; 2) $\alpha = 24^0 34'$; 3) $\alpha = 20^0 17'$; 4) $\alpha = 16^0$
$s = 73{,}5$ $s = 81{,}6$ $s = 89{,}2$ $s = 95$

31. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit $= v_0$ längs einer schiefen Ebene von der Neigung α so aufwärts geworfen, daß sie eine Gerade beschreibt. Welche Länge s erreicht sie und in welcher Zeit t kehrt sie zurück, wenn

1) $\alpha = 27^0 33'$; 2) $\alpha = 25^0 40'$; 3) $\alpha = 18^0 24'$; 4) $\alpha = 19^0$
$v_0 = 24{,}6$ $v_0 = 19{,}7$ $v_0 = 23{,}9$ $v_0 = 17$

32. Bestimme in der vorhergehenden Aufgabe v_0 und s, wenn α und t (die Zeit der Rückkehr) gegeben ist, falls

$\alpha = 28^0$; 2) $\alpha = 24^0$; 3) $\alpha = 21^0$; 4) $\alpha = 15^0$
$t = 12$ $t = 10$ $t = 13$ $t = 14$

33. Eine Kugel rollt von der Ruhe aus über eine schiefe Ebene von A nach B abwärts; gleichzeitig wird eine zweite Kugel von B gegen A so geworfen, daß beide Kugeln im Augenblick der Begegnung gleiche Geschwindigkeit haben. Beweise, daß ihre Wege sich verhalten wie 1 : 3.

34. Welche Geschwindigkeit und welchen Fallraum erreicht an der Atwood'schen Fallmaschine das Gewicht P in der Zeit t = 3 Sekunden, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) P = 1,32; 2) P = 1,43; 3) P = 1,54; 4) P = 1,65
Q = 1,08 Q = 1,17 Q = 1,26 Q = 1,35

35. Welches ist die Beschleunigung der Schwerkraft an 4 verschiedenen Orten der Erde, wenn an der Atwood'schen Fallmaschine zwei Gewichte P und Q in der Zeit t den Fallraum $s = 3{,}5^m$ zurücklegen, im Falle

1) P = 4,62; 2) P = 9,529; 3) P = 8,206; 4) P = 2,522
Q = 3,22 Q = 8,129 Q = 7,506 Q = 2,382
t = 2 t = 3 t = 4 t = 5

36. Auf einer glatten horizontalen Ebene wird eine ohne Reibung bewegliche Last Q von dem freihängenden Gewichte P (§ 144) mittelst einer Schnur in Bewegung gesetzt. Bestimme v und s für die Zeit t = 4 Sekunden, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) P = 1,5; 2) P = 2,4; 3) P = 2,8; 4) P = 2,9
Q = 13,5 Q = 21,6 Q = 25,2 Q = 26,1

37. In welchem Verhältniß sind in der vorhergehenden Aufgabe P und Q zu nehmen, damit die Beschleunigung = a werde, im Falle

1) a = 1,4; 2) a = 2,45; 3) a = 4,2; 4) a = 4,9

38. In welcher Zeit wird ein freihängendes Gewicht P eine Last Q (Fig. 32) über eine schiefe Ebene, deren Steigung $\sin \alpha = \frac{1}{14}$ und Länge $s = 120^m$ ist, hinaufziehen, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) P = 1,36; 2) P = 2,76; 3) P = 10,32; 4) P = 12,07
Q = 15,44 Q = 35,04 Q = 140,88 Q = 165,38

39. In welcher Zeit wird eine Last Q über eine schiefe Ebene von der Neigung β und Länge $s = 50^m$ von einem Gewichte P, welches analog 111 pag. 69 gezwungen ist, auf einer zweiten schiefen Ebene von der Neigung α zu bleiben, empor gezogen werden, wenn $g = 9{,}8^m$, $\sin \alpha = \frac{3}{7}$, $\sin \beta = \frac{3}{28}$ und

1) $P = 52$;	2) $P = 20{,}9$;	3) $P = 17{,}8$;	4) $P = 10{,}9$
$Q = 158$	$Q = 73{,}6$	$Q = 66{,}2$	$Q = 41{,}6$

40. Mit welcher Geschwindigkeit v kommt in der vorhergehenden Aufgabe Q oben an?

41. In welcher Höhe h über dem Horizont befindet sich Q in Aufgabe 39 nach t Sekunden, wenn

1) $t = 16{,}8$; 2) $t = 25{,}2$; 3) $t = 22{,}4$; 4) $t = 35$

42. Ein Bahnzug, welcher mit einer Geschwindigkeit $= 10{,}8^m$ fährt, hat eine Steigung $\sin \alpha = \frac{1}{140}$ zu passieren. Welche Geschwindigkeit hat er bei unveränderter Dampfkraft nach t Sekunden, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) $t = 120$; 2) $t = 90$; 3) $t = 130$; 4) $t = 85$

43. Welche Geschwindigkeit würde der Zug in der vorhergehenden Aufgabe erreichen, wenn er unter denselben Umständen abwärts fährt?

44. Wie verhalten sich die Höhen zweier schiefen Ebenen, wenn eine Kugel über beide in derselben Zeit rollen soll?

45. Eine Kugel rollt über eine schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α, von da unmittelbar über eine zweite von der Länge s_1 und Neigung β. In welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht die Kugel das Ende der zweiten Ebene, wenn $g = 33{,}608$ b. F. und

1) $s = 12$;	2) $s = 15$;	3) $s = 25$;	4) $s = 21$
$\alpha = 16^0$	$\alpha = 14^0$	$\alpha = 9^0$	$\alpha = 17^0$
$s_1 = 22$	$s_1 = 19$	$s_1 = 17$	$s_1 = 18$
$\beta = 17^0$	$\beta = 8^0$	$\alpha = 15^0$	$\beta = 13^0$

46. Welche Werte nimmt Zeit und Geschwindigkeit an, wenn in der vorhergehenden Aufgabe an die Stelle der zwei

Ebenen zwei gleiche Sehnen $AB = BC$ eines vertikalen Kreises vom Radius r in der Weise treten, daß C der tiefste Punkt des Kreises und Bogen $AC = \frac{1}{2}r\pi$ ist, im Falle

1) $r = 18$; 2) $r = 13$; 3) $r = 9$; 4) $r = 24$

47. Bestimme Zeit und Geschwindigkeit, mit welcher ein schwerer Punkt die drei auf einander folgenden Seiten eines regulären Zwölfeckes im Fallen durchläuft, wenn der letzte Punkt zugleich der tiefste des umbeschriebenen vertikalen Kreises ist, im Falle $g = 33{,}608$ b. F. und der Radius des Kreises

1) $r = 15$; 2) $r = 27$; 3) $r = 38$; 4) $r = 29$

48. Ein Stein fällt 120 Fuß vom Turme auf das Dach einer Kirche, rollt über dasselbe und fällt noch einmal 60 Fuß. In welcher Zeit kommt er auf dem Boden an, wenn das Dach 200 F. l., eine Neigung $= 60^0$ hat und $g = 33{,}608$ ist?

49. Welches ist die Tiefe h einer Höhle, wenn man einen hinabfallenden Stein erst nach t Sekunden auffallen hört, falls die Schallgeschwindigkeit $= 313{,}6^m$, $g = 9{,}8^m$ und

1) $t = 4\frac{1}{4}$; 2) $t = 6\frac{9}{16}$; 3) $t = 9$; 4) $t = 20$

50. Wie groß berechnet sich die Schallgeschwindigkeit, wenn man einen Stein in einem h Meter tiefen Schacht nach t Sekunden auffallen hört, im Falle $g = 9{,}81^m$ und

1) $h = 313{,}92$; 2) $h = 78{,}48$; 3) $h = 176{,}58$; 4) $h = 490{,}5$
$t = 9$ $t = 4\frac{1}{4}$ $t = 6\frac{9}{16}$ $t = 11\frac{9}{16}$

III. Wurfbewegung.

51. Auf der Spitze eines Berges, der sich h Meter über den Horizont erhebt, wird eine Büchse horizontal losgeschossen. Wann und wo fällt die Kugel nieder, wenn sie den Lauf der Büchse mit einer Geschwindigkeit $= 350^m$ verläßt, im Falle* $g = 9{,}8^m$ und

1) $h = 176{,}4$; 2) $h = 313{,}6$; 3) $h = 490$; 4) $h = 1760$

---

* Der Widerstand der Luft wird hier wie in allen folgenden Beispielen außer Acht gelassen.

52. Wo befindet sich in der vorhergehenden Aufgabe die Kugel nach Verlauf von 5 Sekunden?

53. Mit welcher Geschwindigkeit wird in einer Höhe h über dem Horizont ein Stein horizontal geschleudert, wenn er beim Niederfallen eine Wurfweite = x erreicht, falls $g = 9{,}8^{m}$ und

1) $h = 40$; 2) $h = 90$; 3) $h = 160$; 4) $h = 250$
$x = 42$ $x = 84$ $x = 140$ $x = 210$

54. Wie tief sinkt eine mit 350^{m} Geschwindigkeit horizontal abgeschossene Büchsenkugel auf eine Entfernung = x, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $x = 70$; 2) $x = 175$; 3) $x = 210$; 4) $x = 350$

55. Wie groß berechnet sich t und die Wurfgeschwindigkeit v_0 eines horizontal geworfenen Körpers, wenn er auf eine Entfernung x um y Meter sinkt, im Falle $g = 9{,}8$ und

1) $x = 24$; 2) $x = 45$; 3) $x = 50$; 4) $x = 48$
$y = 0{,}196$ $y = 0{,}441$ $y = 0{,}784$ $y = 1{,}764$

56. Eine Kugel rollt über die innere Seite eines horizontalen Hohlcylinders vom Radius r und verläßt denselben durch eine Oeffnung im tiefsten Punkte B. Wo befindet sich die Kugel nach 2 Sekunden im freien Fall, wenn der durchlaufene Bogen des Cylinders $\frac{1}{2} r \pi$ beträgt, im Falle

1) $r = 6{,}4$; 2) $r = 1{,}6$; 3) $r = 3{,}6$; 4) $r = 10$

57. Angenommen, die Erde sei in Ruhe und fange in dem Augenblicke zu rotieren an, als ein Stein von einem h Meter hohen Turme zu fallen beginne. Wo wird der Stein niederfallen, wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am Fuße des Turmes 464^{m} beträgt und

1) $h = 100$; 2) $h = 121$; 3) $h = 115$; 4) $h = 144$

58. Welche Abweichungen vom lotrechten Falle wird in der vorhergehenden Aufgabe der Stein in Wirklichkeit zeigen, wenn der Radius der Erde $r = 6\,380\,315^{m}$ ist?

59. Welche Wurfhöhe h und Wurfweite w erreicht eine Kanonenkugel, welche mit einer Geschwindigkeit v_o unter einem Elevationswinkel $= \alpha$ abgeschossen wird, im Falle

1) $v_o = 540$;	2) $v_o = 550$;	3) $v_o = 560$;	4) $v_o = 570$
$\alpha = 12^0$	$\alpha = 14^0$	$\alpha = 15^0$	$\alpha = 17^0$

60. Welches ist die Wurfgeschwindigkeit v_o und der Elevationswinkel α einer Geschützkugel, welche in t Sekunden eine Wurfweite w erreicht, wenn

1) $t = 20,4$;	2) $t = 21,6$;	3) $t = 22,7$;	4) $t = 23,6$
$w = 9780$	$w = 9570$	$w = 9240$	$w = 8950$

61. Unter welchem Elevationswinkel α wird die Wurfweite w nmal so groß, als die Wurfhöhe h im Falle

1) $n = 4$; 2) $n = 8$; 3) $n = 12$; 4) $n = 16$

62. Unter welchem Elevationswinkel α erreicht eine Geschützkugel ihre größte Höhe h bei einer Wurfgeschwindigkeit v_o, wenn

1) $h = 2450$;	2) $h = 1830$;	3) $h = 1670$;	4) $h = 1490$
$v_o = 532$	$v_o = 548$	$v_o = 554$	$v_o = 562$

63. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Wurfweite w der Kugel?

64. Ein geworfener Gegenstand hat im Augenblick seiner größten Höhe h eine Bahngeschwindigkeit $= v$. Welches ist der Elevationswinkel α, die Wurfgeschwindigkeit v_o, die Wurfweite w, wenn

1) $h = 2680$;	2) $h = 2730$;	3) $h = 2790$;	4) $h = 2820$
$v = 485$	$v = 472$	$v = 463$	$v = 458$

65. Welches ist der Richtungswinkel des Rohres einer Kanone, damit die Kugel bei einer Geschwindigkeit $= v_o$ Meter einen bestimmten Zielpunkt treffe, wenn dessen horizontale Entfernung $= x$ und senkrechte Erhebung über den Horizont $= y$ gegeben ist, im Falle $g = 9,8$ und

1) $v_o = 490$;	2) $v_o = 520$;	3) $v_o = 510$;	4) $v_o = 500$
$x = 1176$	$x = 1440$	$x = 1800$	$x = 1929$
$y = 837,9$	$y = 555,9$	$y = 881,6$	$y = 481,6$

66. Ein unter dem Winkel $\alpha = 16^0\ 15'\ 36{,}73''$ mit der Geschwindigkeit $= v_0$ Meter geworfener Körper hat nach einer gewissen Zeit die horizontale Entfernung x erreicht. Bestimme die entsprechende Zeit t und die Höhe y, wenn $g = 9{,}8$ und

1) $v_0 = 350$; 2) $v_0 = 400$; 3) $v_0 = 450$; 4) $v_0 = 500$
$x = 2016$ $x = 1920$ $x = 1728$ $x = 1440$

67. In einer schiefen Ebene von der Neigung α und Länge $AB = s$, welche den Horizont in AH schneidet, wird in der Richtung $AB \perp AH$ mit einer Geschwindigkeit v_0 eine Kugel geworfen, welche in B die Ebene verläßt, von da eine Parabel beschreibt und in C zu Boden fällt. Bestimme die Erhebung h über den Horizont, die Entfernung $AC = x$ und die Dauer t der Bewegung, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) $s = 88{,}2$; 2) $s = 191{,}1$; 3) $s = 323{,}4$; 4) $s = 117{,}6$
$v_0 = 49$ $v_0 = 68{,}6$ $v_0 = 68{,}6$ $v_0 = 49$
$\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{2}{3}$

68. Welche Höhe h würde die Kugel in der vorhergehenden Aufgabe in dem Augenblicke, als sie die Ebene verläßt, erreicht haben, wenn sie bei unverändertem v_0 und α frei geworfen worden wäre; um wie viel beträgt sie weniger?

69. In einer schiefen Ebene von der Neigung α, welche den Horizont in AH schneidet, wird in der Richtung AB eine Kugel mit der Geschwindigkeit v_0 geworfen. Wann und in welcher Entfernung x von A fällt sie im Horizont nieder, wenn $\angle BAH = \beta$, $g = 9{,}8^m$ und

1) $v_0 = 19{,}6$; 2) $v_0 = 29{,}4$; 3) $v_0 = 24{,}5$; 4) $v_e = 29{,}2$
$\alpha = 32^0$ $\alpha = 28^0$ $\alpha = 27^0$ $\alpha = 25^0$
$\beta = 58^0$ $\beta = 62^0$ $\beta = 63^0$ $\beta = 65^0$

70. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die größte Entfernung h von AH (Scheitel der Parabel), und welches ist die Erhebung h_1 über den Horizont in diesem Punkte?

IV. Centralbewegung.

71. Welches ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Aequator der Erde und in der geographischen Breite φ, wenn der Erdradius = 6 380 315 Meter und die Zeit einer vollen Umdrehung = $23^h 56' 4'' = 86164''$ m. Z. ist, im Falle

1) $\varphi = 34^0 19'$; 2) $\varphi = 39^0 52'$; 3) $\varphi = 45^0 32'$; 4) $\varphi = 51^0 48'$

72. Wie groß muß der Durchmesser eines Mühlsteins genommen werden, wenn er in 1 Minute 100 Umläufe machen soll, damit die Umlaufsgeschwindigkeit = v Meter werde, im Falle

1) v = 7,6; 2) v = 7,4; 3) v = 7,2; 4) v = 7

73. Welches ist die mittlere Bahn- oder Revolutionsgeschwindigkeit der Erde, wenn der Bahnradius = 21 Millionen Meilen ist und die Umlaufszeit 365,25 Tage beträgt?

74. Um wieviel übertrifft die Bahngeschwindigkeit der Erde ihre Rotationsgeschwindigkeit am Aequator?

75. Die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde ist = 60 Erdhalbmessern à $6\,380\,315^m$, die Umlaufszeit = 27,3 Tage. Bestimme die mittlere Bahngeschwindigkeit desselben!

76. Welches ist die Centrifugalbeschleunigung eines Punktes in der Aufgabe 71?

77. Welches ist die Centrifugalbeschleunigung der Erde und des Mondes bei ihrer Bewegung um die Sonne nach den Angaben in 73 und 75?

78. Welches würde die Centrifugalbeschleunigung eines Punktes am Aequator sein, wenn (nach 71) t die Dauer einer Umdrehung wäre, im Falle

1) $t = 12^h$; 2) $t = 6^h$; 3) $t = 4^h$; 4) $t = 2^h$

79. Welche Ausdehnung müßte die Erde annehmen, damit bei unveränderter Rotationszeit ein Punkt am Aequator kein Gewicht mehr habe?

80. Mit welcher Geschwindigkeit müßte ein Stein in die Höhe geworfen werden, damit er nicht mehr zurückkehre?

81. Mit welcher Beschleunigung a und a_1 würden Erde und Mond sich zu nähern anfangen, wenn sie in Ruhe wären und keine andere Masse als ihre eigenen einwirkten, die Masse des Mondes $= \frac{1}{80}$ der Erdmasse genommen?

82. Die beobachtete Beschleunigung der Schwere an einem Orte der Erdoberfläche ist die Differenz aus der absoluten Beschleunigung G und der Komponente a cos φ der Centrifugalbeschleunigung a. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung in der geographischen Breite φ, wenn jene in der Breite $\varphi = 48^0\ 50'\ 14''$ einen Wert $g = 9{,}80896^m$ hat, unter Annahme, daß die Erde eine Kugel sei, im Falle

1) $\varphi = 0^0$; 2) $\varphi = 37^0\ 42'$; 3) $\varphi = 41^0\ 25'$; 4) $\varphi = 46^0\ 30'$

83. In welcher Entfernung h von der Erdoberfläche ist die Schwerkraft der Erde gleich der Schwungkraft?

84. Wie groß berechnet sich die Centrifugalbeschleunigung a einer Kreisbewegung aus dem Radius r und der Umlaufszeit t, wenn

1) r = 6,4;	2) r = 5,4;	3) r = 7,2;	4) r = 10
t = 2,5	t = 3,8	t = 4	t = 5,6

85. Ein an einem Faden von der Länge l hängender schwerer Punkt wird in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit v_o geschleudert. Welche Höhe h und mit welcher Geschwindigkeit v erreicht er seinen höchsten Punkt, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) $v_o = 19{,}6$;	2) $v_o = 19{,}6$;	3) $v_o = 9{,}8$;	4) $v_o = 29{,}4$
$l = 39{,}2$	$l = 14{,}7$	$l = 4{,}9$	$l = 24{,}5$

86. Die Umlaufszeiten der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter und Saturn betragen beziehungsweise 87,9; 224,7; 686,9; 4332,6; 10759,2 Tage. Welches sind ihre Entfernungen von der Sonne, wenn die des Merkur zur Einheit angenommen wird?

87. Welches ist die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels von der Länge l, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) $l = 3{,}528$; 2) $l = 6{,}272$; 3) $l = 2{,}45$; 4) $l = 1{,}568$

88. Welches ist wie Länge l eines mathematischen Pendels, wenn dasselbe in 17 St. 27 M. 11,8 Sek. n Schwingungen macht, falls $g = 9{,}8^m$ und

1) $n = 40000$; 2) $n = 35000$; 3) $n = 28000$; 4) $n = 25000$

89. Wie groß berechnet sich die Beschleunigung g der Schwerkraft, wenn ein Pendel von der Länge l in 10000 Sek. n Schwingungen macht, im Falle

1) $n = 7957{,}75$; $l = 1{,}568$ 2) $n = 6366{,}2$; $l = 2{,}45$ 3) $n = 5305{,}17$; $l = 3{,}528$

4) $n = 4547{,}29$ $l = 4{,}802$

90. Die Länge des Sekundenpendels in München und am Aequator ist beziehungsweise 0,99429 und $0{,}98245^m$. Wie groß berechnet sich in beiden Fällen die Beschleunigung g?

91. Ein Pendel macht in einer gewissen Zeit am Fuße eines Berges n Schwingungen, auf der Spitze desselben n_1 Schwingungen. Welches ist die Höhe h des Berges, wenn der Erdradius $r = 6\,380\,000^m$ und

1) $n = 5001$; $n_1 = 5000$ 2) $n = 9002$; $n_1 = 9000$ 3) $n = 12003$; $n_1 = 12000$ 4) $n = 16004$ $n_1 = 16000$

92. Auf der Spitze eines 10925 Fuß hohen Berges macht ein Pendel in einer gewissen Zeit 4000, am Fuße desselben 4002 Schwingungen in derselben Zeit. Wie groß berechnet sich hieraus der Erdradius?

93. Ein Pendel, welches in Paris 86400 Schwingungen macht, schwingt am Aequator in derselben Zeit nur 86274 mal. Wie groß berechnet sich hieraus die Beschleunigung am Aequator, da jene von Paris $9{,}80896^m$ beträgt?

94. Welche Entfernung vom Erdmittelpunkt hat Paris nach den Angaben der vorigen Aufgabe, wenn der Radius des Aequators $= 6\,377\,390^m$ ist und die Schwungkraft unberücksichtigt bleibt?

95. Wie viel Schwingungen macht ein Pendel von der Länge l in 5 St. 14 M. 9,5 Sek. und um wie viele Schwingungen wird dasselbe in dieser Zeit zurückbleiben, wenn sich l

durch Einfluß der Wärme um den 3000. Teil ausdehnt, im Falle $g = 9{,}8^m$ und

1) $l = 2{,}45$; 2) $l = 3{,}528$; 3) $l = 6{,}272$; 4) $l = 39{,}2$

96. Ein Pendel, welches im Orte A Sekunden schlägt, macht innerhalb 24 Stunden in B m Schwingungen weniger als in A. Um wieviel ist das Pendel zu verkürzen, damit es den früheren Gang einhalte, wenn $l = 1^m$ und

1) $m = 200$; 2) $m = 250$; 3) $m = 300$; 4) $m = 350$

97. Eine Pendeluhr, deren Gangwerk für ein Sekundenpendel konstruiert ist, geht täglich um m Minuten zu spät. Durch welche Aenderung der Pendellänge l (§ 172) kann dieser Fehler beseitigt werden, wenn $l = 1^m$ und

1) $m = 2{,}5$; 2) $m = 1{,}8$; 3) $m = 2{,}9$; 4) $m = 3{,}5$

98. Wird ein Pendel so in Schwingung gebracht, daß der schwingende Punkt stets denselben horizontalen Kreis beschreibt, so heißt dasselbe Centrifugalpendel. Bestimme die Zeit t einer vollen Schwingung aus der Länge l und dem Ausschlagswinkel β!

99. Der Watt'sche Regulator ist eine Vorrichtung an Dampfmaschinen, um den Gang derselben zu regulieren. Derselbe trägt an zwei Stäben nach zwei Seiten hin Kugeln, die analog dem Centrifugalpendel um eine feste vertikale Achse rotieren und mit der Rotationsgeschwindigkeit sich heben und senken. Sei $0{,}4''$ die gewöhnliche Umdrehungszeit: wieviel beträgt die lotrechte Hebung oder Senkung, wenn $g = 9{,}8^m$ und die Umdrehungszeit t ist, im Falle

1) $t = 0{,}35$; 2) $t = 0{,}38$; 3) $t = 0{,}44$; 4) $t = 0{,}48$

100. Ein Eisenbahnwagen bewegt sich in einer Krümmung, dessen Radius $= r$ ist, mit einer Geschwindigkeit $= v$. Welche Geschwindigkeit ist zulässig, damit der Wagen durch die Centrifugalkraft nicht aus dem Geleise geschleudert wird, wenn die Spurweite $= 1{,}496^m$, die Höhe des Schwerpunktes über dem Geleise $= 1{,}1^m$ und $g = 9{,}8^m$ ist, im Falle

1) $r = 122{,}4$; 2) $r = 166{,}6$; 3) $r = 340$; 4) $r = 274{,}85$

V. Größe und mechanische Arbeit der Kräfte, Druck, Spannung, Reibung, Stoß.

101. Wie groß ist die Kraft P, welche einem Körper vom Gewichte Q = 49 Kilogramm auf einer horizontalen glatten Ebene die Beschleunigung a erteilt, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) a = 4; 2) a = 6,4; 3) a = 5,8; 4) a = 7,2

102. Wie groß ist der Druck einer elastischen Feder, welche einer frei beweglichen Masse vom Gewichte Q die Beschleunigung $a = 7{,}35^m$ zu erteilen vermag, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) Q = 52; 2) Q = 56; 3) Q = 60; 4) Q = 84

103. Ein Wagen vom Gewichte Q = 6900 Kilogramm bewegt sich horizontal mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_o = 1{,}5^m$. Welche Kraft P ist anzuwenden, um demselben in der Zeit t eine Geschwindigkeit = v mitzuteilen, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) v = 3,5; 2) v = 4,5; 3) v = 5,5; 4) v = 6,5
t = 20 t = 30 t = 40 t = 50

104. Welches ist in der vorhergehenden Aufgabe die Kraft P, wenn der Weg s anstatt der Zeit t gegeben ist, im Falle die übrigen Größen dieselben bleiben, und

1) s = 50; 2) s = 60; 3) s = 70; 4) s = 80

105. Einem Wagen vom Gewichte Q = 1568 Kilogramm, welcher sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_o = 1{,}2^m$ bewegt, soll von einer Kraft P = 80 Kilogramm die Geschwindigkeit v mitgeteilt werden. In welcher Zeit t wird dies geschehen und welchen Weg s wird der Wagen unterdessen zurücklegen, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) v = 2,5; 2) v = 3,2; 3) v = 4,8; 4) v = 5,6

106. Welche Geschwindigkeit v wird ein Wagen vom Gewichte Q = 2000 Kilogr., welcher sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v_o = 1{,}4^m$ bewegt, durch Aufnahme einer mechanischen Arbeit = A erhalten, wenn $g = 9{,}8^m$ und

1) A = 600; 2) A = 1050; 3) A = 1600; 4) A = 2250

107. Ein Körper vom Gewichte $Q = 4{,}2$ Kilogr. wird von einer Kraft P auf die vertikale Höhe h geschleudert, während P nur eine Hubhöhe $s = 0{,}6^m$ hat. Wie groß ist P, wenn 1) $h = 6{,}5$; 2) $h = 8{,}4$; 3) $h = 9{,}8$; 4) $h = 10{,}4$

108. Welche mechanische Arbeit hat ein Schwungrad vom Gewichte $Q = 1470$ Kilogr. durch seine Schwungkraft allein verrichtet, wenn seine Rotationsgeschwindigkeit v_o sich auf v vermindert hat, im Falle $g = 9{,}8^m$ und

1) $v_o = 18$; 2) $v_o = 11$; 3) $v_o = 15$: 4) $v_o = 14$
$v = 3{,}2$ $v = 2$ $v = 2{,}6$ $v = 3$

109. Wie groß berechnet sich der Widerstand R eines Erdwalles, wenn eine 6 Kilogr. schwere und mit 490 Meter Geschwindigkeit abgeschossene Kanonenkugel s Meter tief eindringt, falls $g = 9{,}8^m$ und

1) $s = 0{,}5$; 2) $s = 0{,}3$; 3) $s = 0{,}21$; 4) $s = 0{,}35$

110. Auf ein Mühlrad fallen in jeder Sekunde n Kubikfuß Wasser à 25 Kilogr. von einer Höhe $= h$ Meter. Welches ist die mechanische Arbeit des Wassers in 1 Sekunde, wenn

1) $n = 60$; 2) $n = 70$? 3) $n = 64$; 4) $n = 80$
$h = 1{,}4$ $h = 1{,}5$ $h = 1{,}8$ $h = 1{,}2$

111. Welche mechanische Arbeit verrichtet ein Pochstempel in 1 Stunde, wenn derselbe ein Gewicht $Q = 30$ Kilogr., eine Hubhöhe $= h$ hat und in 1 Minute n mal niederfällt, falls

1) $h = 0{,}5$; 2) $h = 1$; 3) $h = 0{,}8$; 4) $h = 0{,}6$
$n = 40$ $n = 30$ $n = 50$ $n = 25$

112. Ein Kolben vom Durchmesser $= 0{,}24^m$ eines Dampfcylinders macht bei einer Hublänge $= 0{,}3^m$ in 1 Minute n Wechsel (Hin- und Hergänge). Welche mechanische Arbeit verrichtet der Kolben während dieser Zeit, wenn die Spannkraft des Dampfes einen Druck von Q Kilogr. auf eine Fläche $= 0{,}1 \square^m$ ausübt, im Falle

1) $n = 180$; 2) $n = 170$; 3) $n = 160$; 4) $n = 150$
$Q = 1000$ $Q = 900$ $Q = 850$ $Q = 800$

113. Ein Wasserrad, auf welches in jeder Sekunde n Kubikfuß Wasser à 25 Kilogr. von einer Höhe = $1{,}4^{m}$ fallen, hebt eine Last Q in 12 Minuten auf eine vertikale Höhe = h. Wie groß berechnet sich die nützliche und verlorene Arbeit A_1 und A_2, wie groß der Wirkungsgrad e der Maschine, wenn

1) n = 15;	2) n = 20;	3) n = 25;	4) n = 30
h = 60	h = 80	h = 90	h = 70
Q = 5670	Q = 5040	Q = 5950	Q = 8910

114. Welches ist in Aufgabe 38 die nützliche und verlorene Arbeit, welches der Wirkungsgrad der Maschine, wenn unter denselben Umständen die Last Q in der nämlichen Zeit in Folge von Reibung nur eine Strecke von s Meter emporgezogen wird, im Falle

1) s = 70; 2) s = 80; 3) s = 90; 4) s = 100

115. Auf einer horizontalen glatten Ebene befindet sich an dem einen Ende eines Fadens von der Länge l eine Kugel vom Gewichte Q, während das andere Ende befestigt und der Faden bis zur natürlichen Spannung angezogen ist. Welche Spannung erleidet der Faden, wenn die Kugel in der Richtung der Tangente so geschleudert wird, daß sie in 22 Sekunden 7 Umläufe macht, im Falle $g = 9{,}8^{m}$, $\pi = \frac{22}{7}$ und

1) Q = 1,4;	2) Q = 2,8;	3) Q = 4,2;	4) Q = 5,6
l = 3,5	l = 1,75	l = 2,8	l = 1,4

116. Welche Spannung S erleidet ein Faden in der Aufgabe 34?

117. Bestimme die Spannung S in Aufg. 36.

118. Bestimme die Spannung S in Aufg. 38.

119. Bestimme die Spannung S in Aufg. 39.

120. Welche Spannung hat eine Schnur, an der eine Last Q mittelst einer Leitrolle mit einer Beschleunigung = $0{,}7^{m}$ von einem Arbeiter aufwärts und abwärts bewegt wird, im Falle

1) Q = 14,7; 2) Q = 19,6; 3) Q = 24,5; 4) Q = 29,4

121. Welches ist die größte und kleinste Spannung eines Fadens, an dessen unterem Ende ein schwerer Punkt von Q

Kilogr. unter einem Ausschlagwinkel $\beta = 60^0$ in einer vertikalen Ebene schwingt, im Falle

1) $Q = 1,5$; 2) $Q = 2,4$; 3) $Q = 3,2$; 4) $Q = 3,7$

122. An einem Wellrade (§ 94) mit horizontaler Achse wird eine Last Q von dem Gewichte P emporgezogen. Bestimme die Spannung S_1 und S_2 der beiden Seile, wenn $g = 9,8^m$, $R = 1,4^m$, $r = 0,2^m$ und

1) $P = 175$; 2) $P = 140$; 3) $P = 70$; 4) $P = 35$
$Q = 1029$ $Q = 823,2$ $Q = 411,6$ $Q = 205,8$

123. Bei einem Bahnzuge, der mit einer konstanten Geschwindigkeit $= 9^m$ fährt, haben die Kuppelketten eines 4900 Kilogr. schweren Wagens eine Spannung = 240 Kilogramm. Welche Spannung haben die Ketten, wenn durch vermehrten Dampfdruck am Ende einer Strecke = s die Geschwindigkeit = v geworden ist, im Falle $g = 9,8$ und

1) $s = 500$; 2) $s = 400$; 3) $s = 350$; 4) $s = 300$
$v = 11$ $v = 11,4$ $v = 11,8$ $v = 12$

124. Welche Spannung würden die Ketten eines Wagens vom Gewichte $Q = 2500$ Kilogr. in der vorig. Aufg. erleiden, wenn der Zug mit unveränderter Geschwindigkeit eine schiefe Ebene von der Steigung $\sin \alpha$ passieren würde, im Falle die Spannung während der horizontalen Fahrt = 220 Kilogr. und

1) $\sin \alpha = 0,016$; 2) $\sin \alpha = 0,012$; 3) $\sin \alpha = 0,008$; 4) $\sin \alpha = 0,014$

125. Ein Eilzug hat eine Geschwindigkeit = v erlangt. Welche Strecke s wird er noch nach abgesperrtem Dampfe zurücklegen, wenn der Reibungscoeffizient $f = 0,005$, $g = 9,8^m$ und

1) $v = 12,6$; 2) $v = 11,9$; 3) $v = 11,2$; 4) $v = 10,5$

126. Welche Geschwindigkeit v hat ein Bahnzug nach der vor. Aufgabe erreicht, wenn derselbe nach abgesperrtem Dampfe noch eine Strecke = s zurücklegt, im Falle

1) $s = 720$; 2) $s = 845$; 3) $s = 980$; 4) $s = 1280$

127. Wie groß muß das Gefäll eines Bahnkörpers sein, damit der Reibungswiderstand der Fallkraft gleich werde?

128. Welchen Verlust V an Geschwindigkeit erleidet ein Bahnzug in t Sek., wenn er eine Steigung $\sin a = 0{,}015$ passiert, im Falle $g = 9{,}8$, $f = 0{,}002$ und

1) $t = 170$; 2) $t = 190$; 3) $t = 150$; 4) $t = 220$

129. Ein Bahnzug hat auf einem Schienengeleise, dessen Reibungscoefficient $f = 0{,}005$ ist, eine konstante Geschwindigkeit $= v$. Wann würde der Zug bei unveränderter Dampfkraft still stehen, wenn plötzlich $f = 0{,}01$ würde, im Falle $g = 9{,}8^m$ und

1) $v = 10{,}29$; 2) $= 10{,}78$; 3) $v = 11{,}27$; 4) $v = 11{,}76$

130. Wie groß berechnet sich die Dampfkraft einer Lokomotive, welche mit einem Zuge vom Gewichte $Q = 98000$ Kilogr. in t Sek. eine Geschwindigkeit $v = 9{,}6^m$ mitteilt, wenn $g = 9{,}8^m$, $f = 0{,}002$ und

1) $t = 400$; 2) $t = 480$; 3) $t = 150$; 4) $t = 384$

131. Welche mechanische Arbeit A ist aufzuwenden, um einem Wagen vom Gewichte $Q = 1960$ K. in 40 Sek. von der Ruhe aus eine Geschwindigkeit $= v$ mitzuteilen; welche Arbeit A^0 ist erforderlich, denselben in dieser Geschwindigkeit 30 Min. lang horizontal fortzubewegen, wenn $g = 9{,}8$, $f = 0{,}04$ und

1) $v = 1{,}4$; 2) $v = 1{,}2$; 3) $v = 1{,}5$; 4) $v = 2$

132. Wie groß berechnet sich der Widerstand R und der Reibungscoefficient f einer horizontalen Ebene, wenn eine mit der Geschwindigkeit v horizontal geworfene Kugel vom Gewichte $Q = 20$ K. nach t Sek. zur Ruhe kommt, falls $g = 9{,}8$ und

1) $v = 15{,}68$; 2) $v = 31{,}36$; 3) $v = 29{,}4$; 4) $v = 48{,}02$
$t = 40$ $t = 64$ $t = 50$ $t = 70$

133. Wie groß berechnet sich der Reibungswiderstand R der Scheidelatten eines Pochstempels vom Gewichte $Q = 30$ K., wenn derselbe von einer Höhe $= h$ in t Sek. niederfällt, im Falle $g = 9{,}8$ und

1) $h = 0{,}6272$; 2) $h = 0{,}8085$; 3) $h = 0{,}882$; 4) $h = 0{,}9694$
$t = 0{,}4$ $t = 0{,}5$ $t = 0{,}6$ $t = 0{,}7$

134. Wie groß berechnet sich der Reibungscoefficient f und der Reibungswiderstand R eines horizontalen Schienengeleises,

wenn ein ausgehängter Wagen vom Gewichte $Q = 4000$ Kilogr. und einer Geschwindigkeit $= v$ in t Sek. zur Ruhe kommt, im Falle $g = 9,8$ und

1) $t = 300$; 2) $t = 160$; 3) $t = 250$; 4) $t = 200$
$v = 7,35$ $v = 7,84$ $v = 8,33$ $v = 8,82$

135. Wie groß müßte der Reibungswiderstand R_1 eines Bremsapparates sein, wenn in der vorhergehenden Aufgabe unter denselben Umständen der Wagen in 50 Sekunden zur Ruhe kommen soll?

136. Wie groß berechnet sich der Reibungscoeffizient f einer schiefen Ebene von der Neigung α, wenn ein abwärts rollender Körper zu einer Strecke $= s$ den zehnten Teil der Zeit mehr braucht, welche er ohne Reibung brauchen würde, im Falle

1) $\alpha = 15^0$; 2) $\alpha = 20^0$; 3) $\alpha = 24^0$; 4) $\alpha = 18^0$

137. Eine Kugel rollt mit der Geschwindigkeit $v_0 = 30^m$ über eine schiefe Ebene von der Neigung α geradlinig aufwärts. Welche Strecke s legt dieselbe in der Zeit t zurück, wenn $f = 0,005$, $g = 9,8$, $\sin \alpha = 0,28$, im Falle

1) $t = 5$; 2) $t = 10$; 3) $t = 15$; 4) $t = 20$

138. Nach welcher Zeit wird die Kugel in der vorhergehenden Aufgabe umkehren?

139. Welche Kraft X im Umfange eines 3000 Kilogr. schweren Wasserrades überwindet den Widerstand der Zapfenreibung, wenn r und ϱ die Radien von Rad und Zapfen sind, im Falle $f = 0,075$ und

1) $r = 5$; 2) $r = 4,5$; 3) $r = 5,2$; 4) $r = 5,1$
$\varrho = 0,14$ $\varrho = 0,16$ $\varrho = 0,13$ $\varrho = 0,17$

140. Welche mechanische Arbeit A geht in der vor. Aufg. durch die Zapfenreibung auf eine Umdrehung verloren?

141. Welche Stoßkraft P übt ein Körper von Q Kilogr. auf eine horizontale Unterlage aus, wenn derselbe von einer Höhe $= h$ herabfällt, im Falle

1) $Q = 12$; 2) $Q = 140$; 3) $Q = 80$; 4) $Q = 250$
$h = 15$ $h = 25$ $h = 9,2$ $h = 12,4$

142. Von welcher Höhe h muß ein 5 Kilogr. schwerer Körper auf einen Nagel fallen, damit er denselben s Meter tief in 1 hartes Holz von der Widerstandsfähigkeit = R eintreibe, wenn

1) R = 200; 2) R = 250; 3) R = 300: 4) R = 320
s = 0,007 s = 0,004 s = 0,006 s = 0,008

143. Ein Rammbär (Rammklotz, Hoyer) vom Gewichte P fällt von einer Höhe = $1{,}2^m$ auf einen Pfahl vom Gewichte Q und treibt ihn mit 4 Schlägen s Meter tief in den Boden. Welches ist die mechanische Arbeit des Rammbärs und welches der Widerstand des Bodens oder der größtmöglichen Belastung ohne einzusinken, wenn

1) P = 300; 2) P = 400; 3) P = 350; 4) P = 420
Q = 200 Q = 240 Q = 250 Q = 280
s = 0,04 s = 0,05 s = 0,07 s = 0,03

144. Ein Pfahl soll so in den Boden geschlagen werden, daß er eine Belastung von R Kilogr. zu tragen fähig ist. Wie tief darf derselbe mit den letzten 25 Schlägen noch eindringen, wenn der Rammbär 540, der Pfahl 460 Kilogr. wiegt und die Fallhöhe $1{,}5^m$ beträgt, im Falle

1) R = 6210; 2) R = 9936; 3) R = 12420; 4) R = 18630

145. Eine unelastische Kugel von Q Kilogr. trifft eine ruhende Kugel von Q_1 Kilogr. mit der Geschwindigkeit v; bestimme Q_1 wenn die Geschwindigkeit nach dem Stoße = 20^m ist, im Falle

1) Q = 12; 2) Q = 28; 3) Q = 4,8; 4) Q = 6,8
v = 30 v = 26 v = 35 v = 45

146. Eine vertikal aufwärts geworfene Kugel von 7 Kilogr. trifft in einer Höhe = h einen ruhenden Gegenstand von 3 Kilogr. Wie hoch werden beide Körper nach dem Stoße noch steigen, wenn die Wurfgeschwindigkeit = v_o, g = $9{,}8^m$, im Falle

1) h = 4,4 2) h = 4,1; 3) h = 5,6; 4) h = 3,6
v_o = 12 v_o = 9 v_o = 21 v_o = 14

147. Eine unvollkommen elastische Kugel fällt von einer Höhe = h auf eine horizontale Ebene und springt jedesmal mit der halben erlangten Geschwindigkeit vertikal zurück. Wie hoch steigt sie mit dem 3. Rücksprung, wenn

1) $h = 64$; 2) $h = 48$; 3) $h = 32$; 4) $h = 16$

148. Während eine unelastische Kugel von Q Kilogr. über eine glatte schiefe Ebene von der Länge s und Neigung α von oben zu rollen anfängt, wird gleichzeitig eine andere Kugel von Q_1 Kilogr. der ersteren mit der Geschwindigkeit v_o von unten entgegen geworfen, so daß sie sich begegnen müssen. Mit welcher Geschwindigkeit kommen beide nach dem Stoße unten an, wenn $\sin\alpha = \frac{4}{49}$, $g = 9,8$ und

1) $Q = 20$; $Q_1 = 5$; $v_o = 5$; $s = 6,25$
2) $Q = 80$; $Q_1 = 20$; $v_o = 10$; $s = 25$
3) $Q = 156$; $Q_1 = 13$; $v_o = 13$; $s = 16,25$
4) $Q = 180$; $Q_1 = 45$; $v_o = 15$; $s = 56,25$

149. Wie lange dauert die Bewegung in Aufg. 148 vor und nach dem Zusammenstoße?

150. Ueber eine glatte schiefe Ebene von der Neigung α rollen, gleichzeitig in A und B von der Ruhe aus beginnend, zwei Kugeln von gleichen Massen in derselben Geraden abwärts, erreichen beide in C die Horizontalebene, wo sie ungehindert ihren Lauf fortsetzen können. Nach welcher Zeit werden beide aufeinander treffen, und welches ist ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße, wenn $AC = s$, $BC = s_1$, $g = 9,8^m$, $\sin\alpha = 0,1$, im Falle

1) $s = 24,61$; 2) $s = 17,64$; 3) $s = 12,25$; 4) $s = 7,84$
$s_1 = 17,64$ $\quad s_1 = 12,25$ $\quad s_1 = 7,84$ $\quad s_1 = 4,41$

Walberer, Joh. Chr., Leitfaden zum Unterrichte in der Arithmetik und Algebra an Gymnasien und verwandten Anstalten. VI u. 114 S. gr. 8. 1876. M. 1. 20.

Bähring, Bernhard, Die Reform des christlichen Religionsunterrichtes. VIII u. 112 S. 8. 1872. M. 1. 50.

Beck, H., Die Schule in Wechselwirkung mit dem Leben. Blicke in die Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft deutscher Schulen. 279 S. 8. 1872. M. 4.

– Aufgaben eines Unterrichtsgesetzes, betreffend Verwaltung, Beaufsichtigung und Förderung der Bildungsanstalten durch die Eltern, Gemeinden, Kirchen und den Staat. 105 S. 8. 1872. M. 1. 50.

Biedermann, Georg, Lateinisches Elementarbuch für die erste Klasse der Lateinschule. Dritte Auflage. VII u. 135 S. gr. 8. 1880. M. 1. 60.

— Lateinisches Uebungsbuch für die zweite Klasse der Lateinschule. Zweite Auflage. VI u. 179 S. gr. 8. 1880. M. 1. 60.

Buchner, Wilhelm, Töchterschule oder Fachschule. Durch den Berliner Lette-Verein für Förderung der Erwerbsfähigkeit des weiblichen Geschlechts gekrönte Preisschrift. VIII u. 144 S. 8. 1873. M. 2.

Eberty, Gustav, Ueber das Verhältniß des Staates zur Volkserziehung. 38 S. 8. 1872. 50 ₰.

Günther, Siegmund, Grundlehren der mathematischen Geographie und elementaren Astronomie zum Gebrauch in höheren Mittelschulklassen und bei akademischen Vorträgen. VIII u. 127 S. gr. 8. 1878. M. 1. 80.

Hartung, Carl, Lateinische Sentenzen, gesammelt und geordnet. Sententiarum liber. Collegit et disposuit Carolus Hartung. X u. 245 S. 8. 1872. M. 2. 40.

Henschel, F., A collection of anglicisms, germanisms and phrases of the english and german languages. Sammlung von Anglicismen, Germanismen und Redensarten der englischen und deutschen Sprache. 244 S. 8. 1871. M. 2.

Illing, Lorenz, Die organische Verbindung des Kindergartens mit der Schule. 35 S. gr. 8. 1875. 60 ₰.
— Volkskindergarten oder Bewahranstalt? 34 S. gr. 8. 1876. 60 ₰.

Jolly, Julius, Schulgrammatik und Sprachwissenschaft. Studien über die Neugestaltung des grammatischen Unterrichts nach den Ergebnissen und der Methode der vergleichenden Sprachwissenschaft. VIII u. 92 S. gr. 8. 1874. ℳ 1. 60.

Jürgens, Karl, Neues etymologisches Fremdwörterbuch mit Bezeichnung der Betonung und Aussprache. VI u. 947 S. gr. 8. Ohne Jahreszahl. (1875.) ℳ 10.

Kaßner, Berthold, Die deutsche Nationalerziehung. Ein Beitrag zur Reorganisation des deutschen Schulwesens. IV u. 175 S. 8. 1873. ℳ 2. 40.

Levett, S. E., English conversations for the use of young girls. Englische Gespräche für junge Mädchen. (IV u.) 178 S. 8. Ohne Jahreszahl. (1870.) ℳ 1. 50.

Mensch, H., Englische und französische Verslehre. Ein Leitfaden für höhere Schulen und Studirende. 64 S. 8. 1870. 50 ₰.
— Stufenmässige Anleitung zu Sprech- und Schreibübungen in der englischen Sprache für Schulen und den Selbstunterricht. VIII u. 223 S. 8. 1872. ℳ 2.

Deutsche Nationalbibliothek. Volksthümliche Bilder und Erzählungen aus Deutschlands Vergangenheit und Gegenwart.

I. Reihe: Bd. I. Germanien in den ersten Jahrhunderten, von Prof. Dr. Weber. ℳ 2.
Bd. II. Die ritterliche Gesellschaft im Zeitalter des Frauenkultus, von Dr. Jakob Falke. ℳ 2.
Bd. III. Deutschlands trübste Zeit (der 30jährige Krieg), von Dr. Karl Biedermann. ℳ 3.
Bd. IV. Deutsche Kaiser von Karl dem Grossen bis Maximilian I., von Prof. Dr G. Waitz. ℳ 1.
Bd. V. Kaiser Heinrich IV., von Prof. Dr. K. A. Mayer. ℳ 3.
Bd. VI. Luther, von Prof. Dr. A. Schottmüller. ℳ 3.
Bd. VII. Der siebenjährige Krieg, von Prof. Dr. Joseph Kutzen. ℳ 3.
Bd. VIII. Geschichte der Hausa, von Dr. Falke. ℳ 2.
Bd. IX. Niedersächsische Geschichten, von Prof. Dr. W. Wachsmuth. ℳ 3.
Bd. X. Kaiser Maximilian I., von Dr. Karl Klüpfel. ℳ 2.

Walberer, Johann Christoph

Anfangsgründe der Mechanik fester Körper mit vielen Uebungsaufgaben zum Schulgebrauche an Gymnasien und verwandten Lehranstalten

München 1881